

---

# Theoretische Physik IV: Statistische Physik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer, WS 2017/18)

## Aufgabenzettel Nr. 9

Abgabe am Freitag, den 15.12.17 nach der Vorlesung. Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name des Tutors und Ihrem Namen deutlich lesbar beschriften.

---

### Aufgabe 1: Geschwindigkeitsverteilung mit maximaler Entropie (7 Pkt.)

Betrachten Sie die Geschwindigkeit  $v \in (-\infty, \infty)$  eines freien Teilchens in einer Dimension.

- i.) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p_1(v)$  nach dem Prinzip der maximalen Entropie unter der Nebenbedingung, dass die mittlere Geschwindigkeit  $\langle |v| \rangle = v_0$  vorgegeben sei. (3 Pkt.)
- ii.) Bestimmen Sie nun die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p_2(v)$  unter der Nebenbedingung, dass die mittlere kinetische Energie  $\langle E \rangle = \langle \frac{1}{2}mv^2 \rangle = \frac{1}{2}mv_0^2$  vorgegeben sei. (3 Pkt.)
- iii.) Welche der beiden Nebenbedingungen enthält mehr Information über die Geschwindigkeit? Geben Sie die Informationsdifferenz in "bit" an, d.h.  $I_2 - I_1 = \frac{1}{\ln 2} (\langle \ln p_1 \rangle - \langle \ln p_2 \rangle)$ . (1 Pkt.)

### Aufgabe 2: Der Taschenspieler (6 Pkt.)

Ein Taschenspieler möchte einen Würfel so präparieren, dass die  $\text{III}$  mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{5}$  fällt. Damit seine Opfer nichts bemerken, soll der Mittelwert der geworfenen Augen mit dem eines normalen Würfels übereinstimmen und die Unkenntnis über das Ergebnis eines Wurfes möglichst groß sein.

- i.) Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung muss er für die übrigen Zahlen wählen? (5 Pkt.)  
*Hinweis 1:* Maximieren Sie die Entropie unter Nebenbedingungen mithilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Wie viele Nebenbedingungen gibt es und wie sehen diese aus?  
*Hinweis 2:* Nach der Maximierung bekommt man für die Wahrscheinlichkeiten einen Ausdruck der Form  $p(n) = Ax^n$ , wobei  $A$  und  $x$  von den Nebenbedingungen abhängen und  $n = \text{I}, \dots, \text{III}$  ist. Dies führt auf Gleichungen, die numerisch gelöst werden sollen, z.B. mittels eines Newton-Verfahrens.
- ii.) Wie groß ist der Informationsvorsprung? Geben Sie diesen in "bit" an. (1 Pkt.)

### Aufgabe 3: Entropie harmonischer Quantenoszillatoren (6 Pkt.)

Berechnen Sie die Entropie  $S$  und Temperatur  $T$  für die Gesamtheit von  $N$  dreidimensionalen harmonischen Quantenoszillatoren. Hierbei sei  $N \gg 1$ , alle Oszillatoren haben die gleiche Frequenz  $\omega$  und die Gesamtenergie  $E$  sei fest vorgegeben.

*Hinweis:* Berechnen Sie die Gesamtzahl der Realisierungen  $\Omega$ , indem Sie die Quantenzustände auf  $3N$  unterscheidbare "Kästen", die aneinandergereiht durch  $3N - 1$  Zwischenwände verbunden sind, verteilen. Nähern Sie die Entropie für große  $N$ .

### Münsteraufgabe

Auf der historischen Abbildung des Münsters neben dem Schaufenster der Hof-Apotheke, Ecke Kaiser-Joseph-/Münsterstraße, sieht man, dass vier Stufen zum Hauptportal des Münsters hinaufführten. Warum ist es heute nur noch eine?