

Studentenseminar: Physik in der Biologie

Räumliche Systeme, gebrochene Symmetrien und Musterbildung:

Komplexe Ginzburg-Landau Gleichung

Peter Baumann

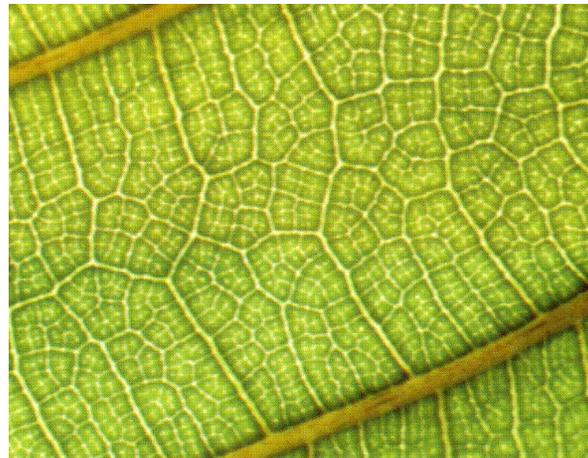
2. Mai 2006

Komplexe Ginzburg-Landau Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (\lambda - \lambda_c)z + (1 + i\alpha)\Delta z - (1 + i\beta)|z|^2 z$$

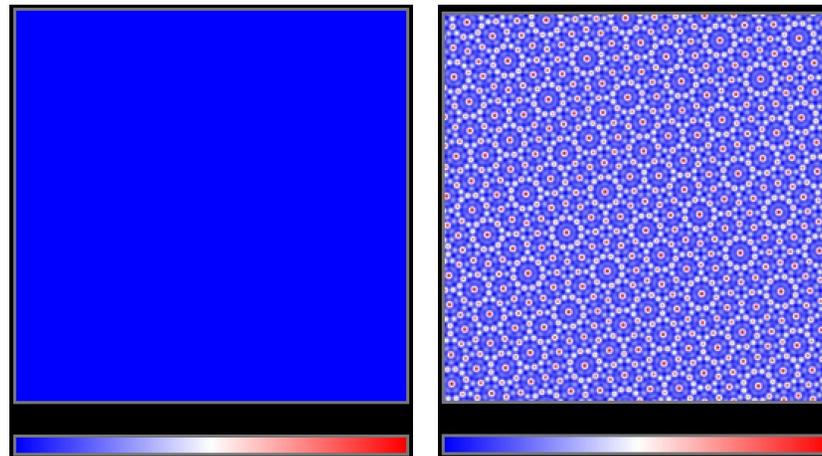
Musterbildung

Musterbildung ist ein Prozess, bei dem ein räumlich homogener Zustand instabil wird und einem inhomogenen Zustand, also einem Muster weicht.



Gebrochene Symmetrien

Unter Symmetriebrechung versteht man den Übergang eines Systems an einem kritischen Punkt von einem Zustand höherer Unordnung in einen von zwei möglichen symmetrischen Zuständen höherer Ordnung.



Räumliche Systeme

„Räumliche Systeme haben eine nicht-vernachlässigbare Ausdehnung.“

Beispiel



Beispiel

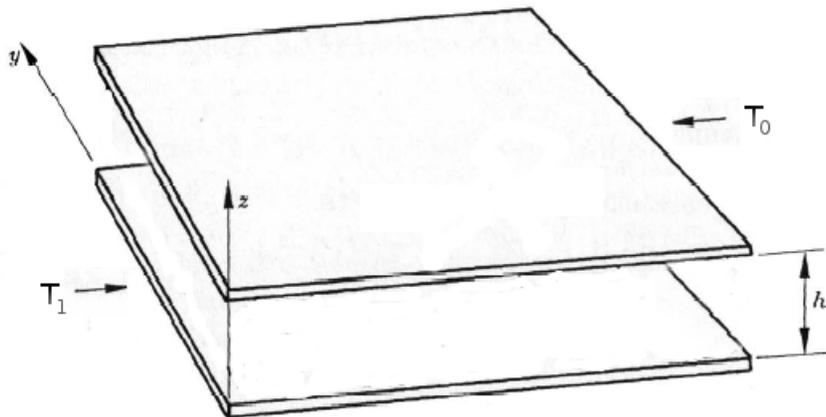


. . . Bénard-Zelle

Bénard-Experiment – Aufbau

- zwei horizontale Platten:
 - untere Platte \rightarrow Temperatur T_0
 - obere Platte \rightarrow Temperatur $T_1 < T_0$
- Abstand zwischen den Platten sei klein
- dazwischen befinde sich eine viskose Flüssigkeit

Bénard-Experiment – Aufbau



- Temperaturdifferenz $\Delta T = T_0 - T_1$ sorgt für Wärmertransport
- Viskosität bremst Konvektion

Bénard-Experiment – Gleichungen

- Kontinuitätsgleichung

Bénard-Experiment – Gleichungen

- Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Bénard-Experiment – Gleichungen

- Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

- vereinfachte Navier-Stokes-Gleichungen

Bénard-Experiment – Gleichungen

- Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

- vereinfachte Navier-Stokes-Gleichungen

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p - \rho g \mathbf{e}_z + \eta \Delta \mathbf{v}$$

Bénard-Experiment – Gleichungen

- Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

- vereinfachte Navier-Stokes-Gleichungen

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p - \rho g \mathbf{e}_z + \eta \Delta \mathbf{v}$$

- Wärmeleitungsgleichung

Bénard-Experiment – Gleichungen

- Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

- vereinfachte Navier-Stokes-Gleichungen

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p - \rho g \mathbf{e}_z + \eta \Delta \mathbf{v}$$

- Wärmeleitungsgleichung

$$\rho_0 c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T \right] = \lambda \Delta T$$

Bénard-Experiment – Gleichungen

- Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

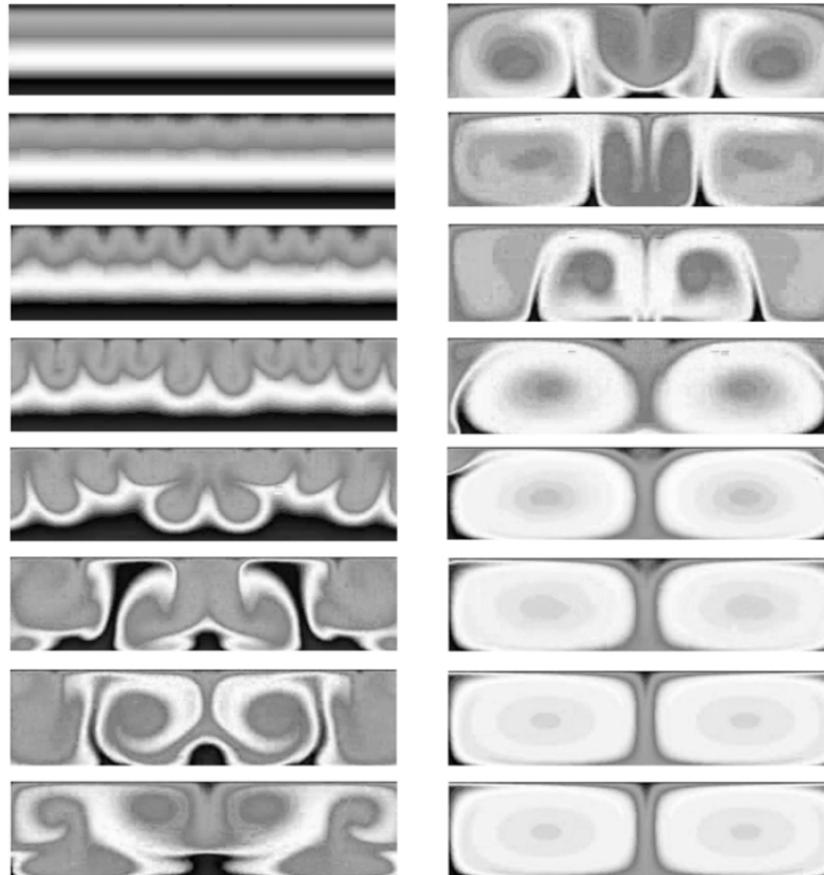
- vereinfachte Navier-Stokes-Gleichungen

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p - \rho g \mathbf{e}_z + \eta \Delta \mathbf{v}$$

- Wärmeleitungsgleichung

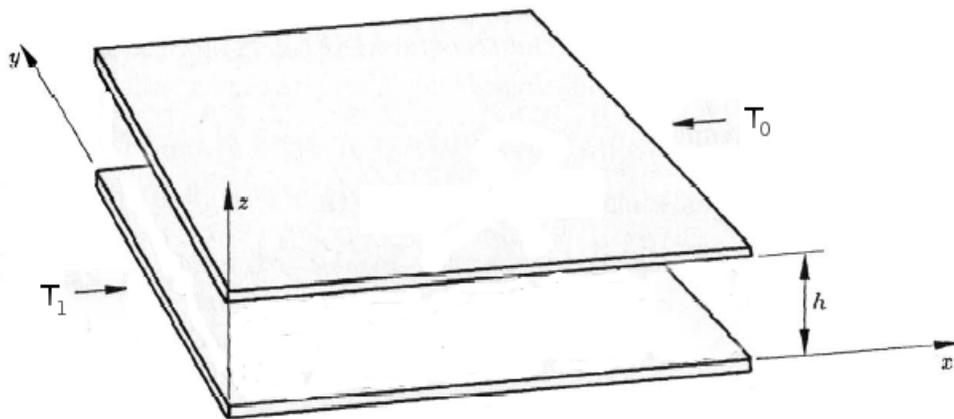
$$\rho_0 c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T \right] = \lambda \Delta T$$

Bénard-Experiment – Beobachtung



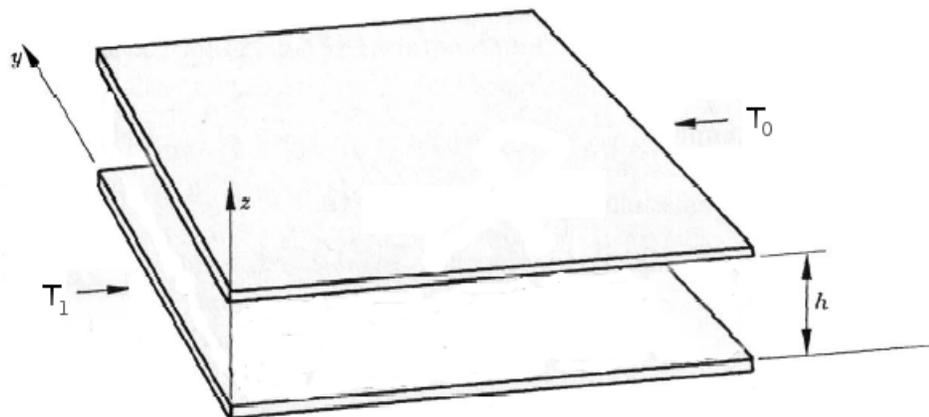
Etwas abstrakter

Zuerst sieht man:

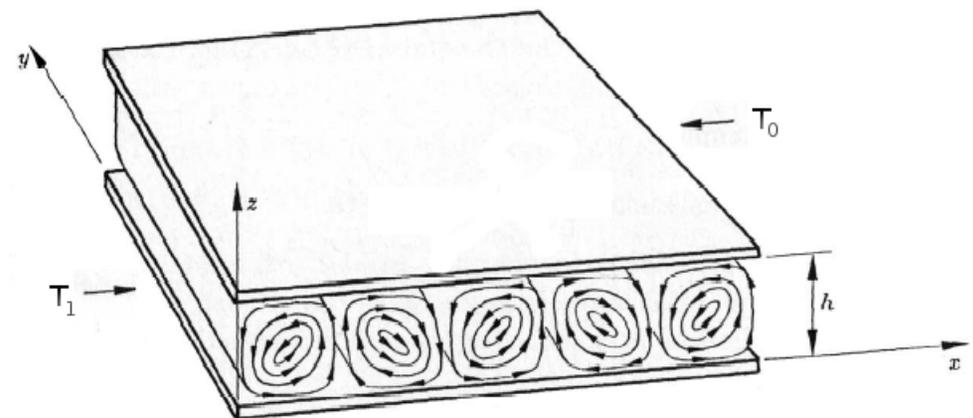


Etwas abstrakter

Zuerst sieht man:

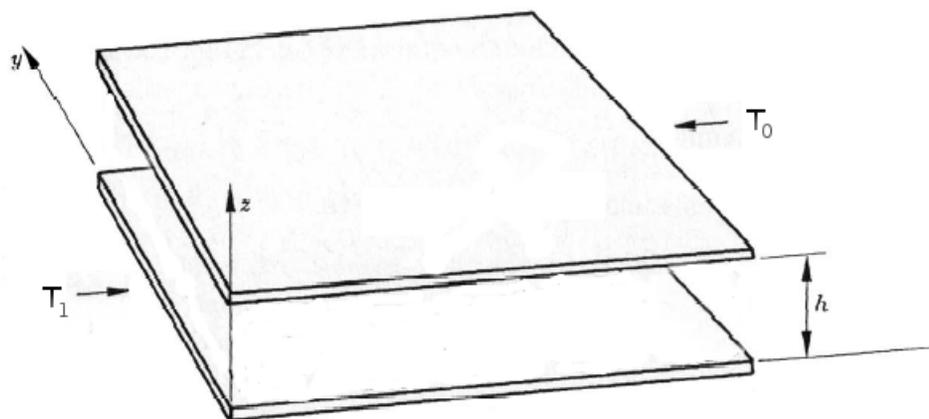


dann „irgendwann“:

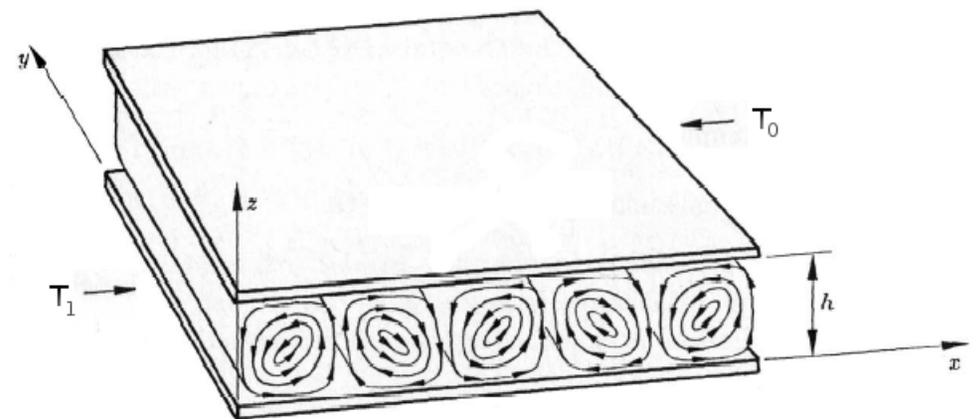


Etwas abstrakter

Zuerst sieht man:



dann „irgendwann“:



Wann ist „irgendwann“?

Lineare Stabilitätsanalyse – allgemein I

- Gegeben:

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t), \lambda)$$

Lineare Stabilitätsanalyse – allgemein I

- Gegeben:

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t), \lambda)$$

- Betrachte nun wie sich das System unter einer Störung $\mathbf{x}(t)$ um einen (stationären) Zustand \mathbf{X}_s verhält:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_s + \mathbf{x}(t)$$

Lineare Stabilitätsanalyse – allgemein I

- Gegeben:

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t), \lambda)$$

- Betrachte nun wie sich das System unter einer Störung $\mathbf{x}(t)$ um einen (stationären) Zustand \mathbf{X}_s verhält:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_s + \mathbf{x}(t)$$

Lineare Stabilitätsanalyse – allgemein II

Durch Taylor-Entwicklung von \mathbf{F} um \mathbf{X}_s erhält man:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \underbrace{\mathcal{L}(\lambda) \cdot \mathbf{x}}_{\text{lineare Terme}} + \underbrace{\mathbf{h}(\mathbf{x}, \lambda)}_{\text{nicht – lineare Terme}}$$

Lineare Stabilitätsanalyse – allgemein II

Durch Taylor-Entwicklung von \mathbf{F} um \mathbf{X}_s erhält man:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \underbrace{\mathcal{L}(\lambda) \cdot \mathbf{x}}_{\text{lineare Terme}} + \underbrace{\mathbf{h}(\mathbf{x}, \lambda)}_{\text{nicht – lineare Terme}}$$

bzw. in 1. Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{L}(\lambda) \cdot \mathbf{x}$$

Lineare Stabilitätsanalyse – allgemein III

Mit dem Ansatz $\mathbf{x} = \mathbf{u} e^{\omega t}$ erhält man die Eigenwertgleichung

$$\mathcal{L}(\lambda) \cdot \mathbf{u} = \omega \mathbf{u}$$

Lineare Stabilitätsanalyse – allgemein III

Mit dem Ansatz $\mathbf{x} = \mathbf{u} e^{\omega t}$ erhält man die Eigenwertgleichung

$$\mathcal{L}(\lambda) \cdot \mathbf{u} = \omega \mathbf{u}$$

- wenn $Re(\omega) < 0$, dann ist \mathbf{X}_s *asymptotisch stabil*

Lineare Stabilitätsanalyse – allgemein III

Mit dem Ansatz $\mathbf{x} = \mathbf{u} e^{\omega t}$ erhält man die Eigenwertgleichung

$$\mathcal{L}(\lambda) \cdot \mathbf{u} = \omega \mathbf{u}$$

- wenn $Re(\omega) < 0$, dann ist \mathbf{X}_s *asymptotisch stabil*
- wenn $Re(\omega) > 0$, dann ist \mathbf{X}_s *instabil*

Lineare Stabilitätsanalyse – allgemein III

Mit dem Ansatz $\mathbf{x} = \mathbf{u} e^{\omega t}$ erhält man die Eigenwertgleichung

$$\mathcal{L}(\lambda) \cdot \mathbf{u} = \omega \mathbf{u}$$

- wenn $Re(\omega) < 0$, dann ist \mathbf{X}_s *asymptotisch stabil*
- wenn $Re(\omega) > 0$, dann ist \mathbf{X}_s *instabil*
- wenn $Re(\omega) = 0$, dann

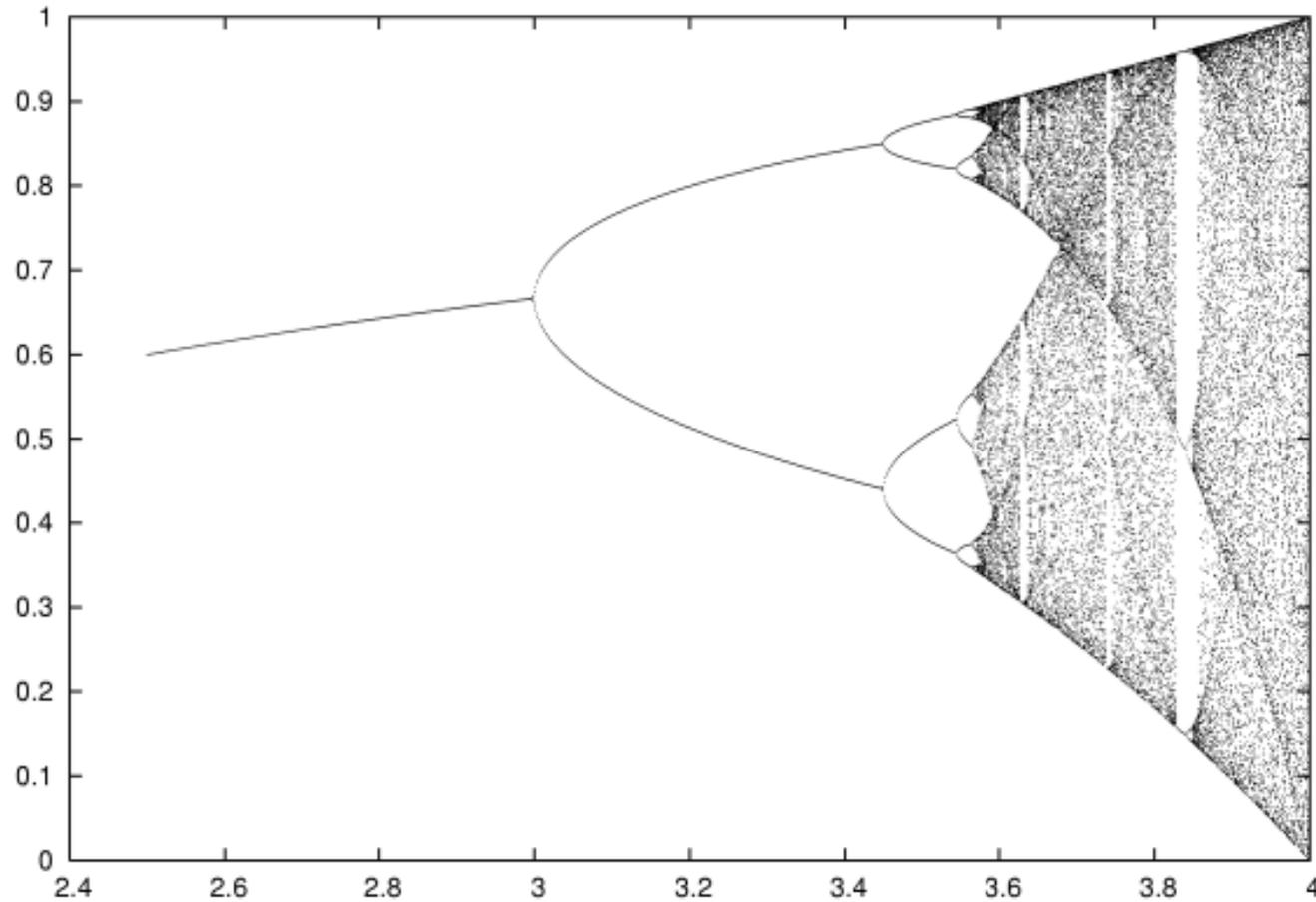
Lineare Stabilitätsanalyse – allgemein III

Mit dem Ansatz $\mathbf{x} = \mathbf{u} e^{\omega t}$ erhält man die Eigenwertgleichung

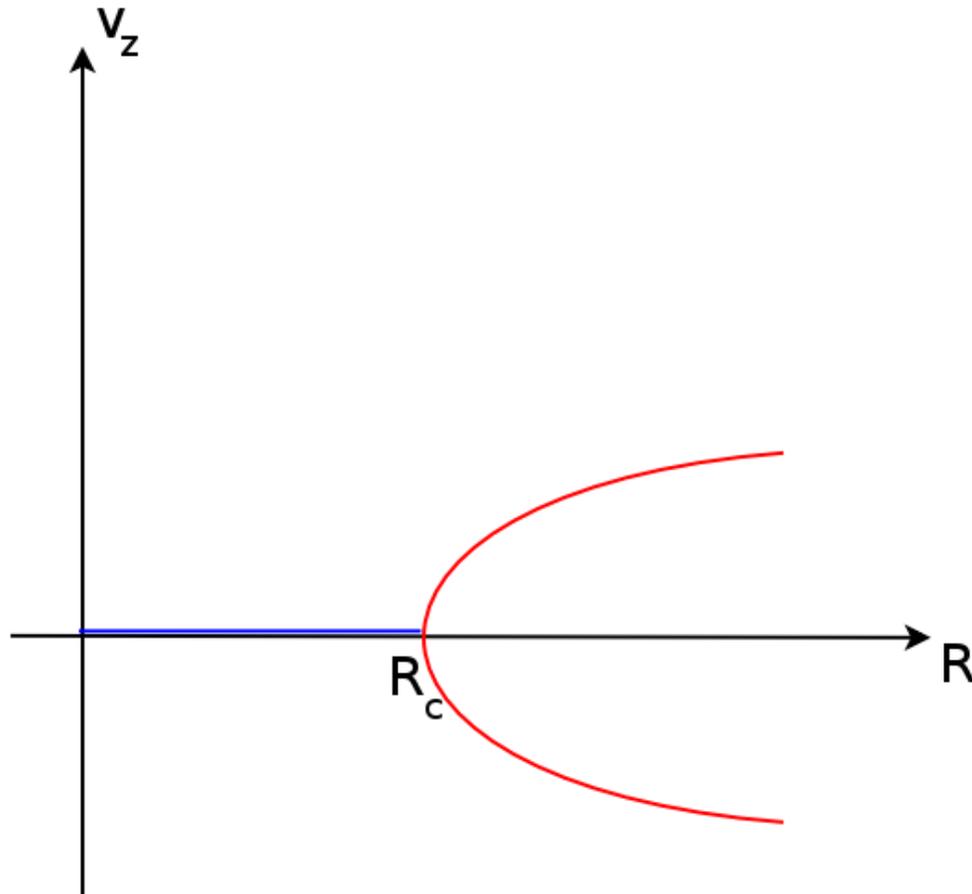
$$\mathcal{L}(\lambda) \cdot \mathbf{u} = \omega \mathbf{u}$$

- wenn $Re(\omega) < 0$, dann ist \mathbf{X}_s *asymptotisch stabil*
- wenn $Re(\omega) > 0$, dann ist \mathbf{X}_s *instabil*
- wenn $Re(\omega) = 0$, dann **Bifurkation**

Bifurkation



Bifurkation im Bénard-Experiment



Lineare Stabilitätsanalyse – konkret I

- Stationärer Zustand \mathbf{X}_s : $\mathbf{v} = 0$

$$T_s(z) = T_0 - \beta z \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{\Delta T}{h}$$

$$p_s(z) = p_0 - \rho_0 g \left(1 + \frac{\alpha \beta z}{2} \right) z$$

Lineare Stabilitätsanalyse – konkret II

- Störungs-Ansatz

$$T = T_s(z) + \theta(\mathbf{r}, t)$$

$$p = p_s(z) + \delta p(\mathbf{r}, t)$$

$$\rho = \rho_s(z) + \delta \rho(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{v} = \delta \mathbf{v} = (u, w, v)$$

einsetzen in die Gleichungen ergibt

Lineare Stabilitätsanalyse – konkret III

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = Rv + \Delta \theta \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta w = P \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \nabla^4 v \right) \quad (2)$$

- Rayleigh-Zahl $R \propto \Delta T$
 - Kontrollparameter
 - abhängig von den Randbedingungen

Lineare Stabilitätsanalyse – konkret IV

- Lösung der Gl. (1-2):

$$\begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} = e^{\omega t} \Phi_k(x, y) \Psi_n(z) \begin{pmatrix} \theta_{kn} \\ v_{kn} \end{pmatrix}$$

mit (für geeignete Randbedingungen)

$$\Phi_k(x, y) = e^{i(k_x x + k_y y)}$$

$$\Psi_n(z) = \sin(n\pi z)$$

Lineare Stabilitätsanalyse – konkret V

- Für $\lambda_k = -k^2 = -(k_x^2 + k_y^2)$ findet man

$$R = R(k, n) = \frac{(k^2 + n^2\pi^2)^3}{k^2}$$

- Kritischer Wert für R:

$$R_c = \frac{27}{4}\pi^4 \approx 657,5$$

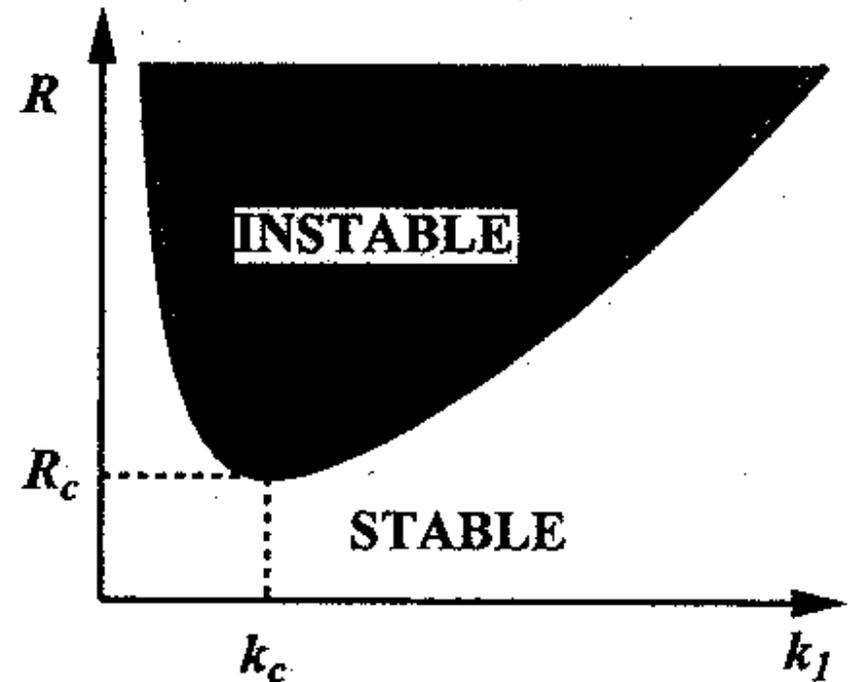
Lineare Stabilitätsanalyse – konkret V

- Für $\lambda_k = -k^2 = -(k_x^2 + k_y^2)$ findet man

$$R = R(k, n) = \frac{(k^2 + n^2\pi^2)}{k^2}$$

- Kritischer Wert für R:

$$R_c = \frac{27}{4}\pi^4 \approx 657,5$$



Lineare Stabilitätsanalyse – Ergebnis

Mit Hilfe der linearen Stabilitätsanalyse ist es möglich zu zeigen, dass sich das Verhalten eines Systems qualitativ ändert, sobald ein Kontrollparameter λ einen kritischen Wert λ_c überschreitet.

Lineare Stabilitätsanalyse – Ergebnis

Mit Hilfe der linearen Stabilitätsanalyse ist es möglich zu zeigen, dass sich das Verhalten eines Systems qualitativ ändert, sobald ein Kontrollparameter λ einen kritischen Wert λ_c überschreitet.

Aber

Lineare Stabilitätsanalyse – Ergebnis

Mit Hilfe der linearen Stabilitätsanalyse ist es möglich zu zeigen, dass sich das Verhalten eines Systems qualitativ ändert, sobald ein Kontrollparameter λ einen kritischen Wert λ_c überschreitet.

Aber sobald dieser kritische Wert überschritten ist, werden die linearisierten Gleichungen wertlos, da sie i.d.R. divergieren

Lineare Stabilitätsanalyse – Ergebnis

Mit Hilfe der linearen Stabilitätsanalyse ist es möglich zu zeigen, dass sich das Verhalten eines Systems qualitativ ändert, sobald ein Kontrollparameter λ einen kritischen Wert λ_c überschreitet.

Aber sobald dieser kritische Wert überschritten ist, werden die linearisierten Gleichungen wertlos, da sie i.d.R. divergieren

⇒ **Bifurkations-Analyse**

Bifurkations-Analyse

- Betrachte wieder den allgemeinen Fall

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{L}(\lambda) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}, \lambda)$$

- Untersuche das *lokale* Verhalten in der Nähe des kritischen Punktes λ_c bzw $\omega_c = \omega(\lambda_c)$

Bifurkations-Analyse

- Betrachte wieder den allgemeinen Fall

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{L}(\lambda) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}, \lambda)$$

- Untersuche das *lokale* Verhalten in der Nähe des kritischen Punktes λ_c bzw $\omega_c = \omega(\lambda_c)$
- Zunächst sei aber $Im(\omega_c) = 0$, d.h. die Bifurkation ist stationär

Bifurkations-Analyse

- Betrachte wieder den allgemeinen Fall

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{L}(\lambda) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}, \lambda)$$

- Untersuche das *lokale* Verhalten in der Nähe des kritischen Punktes λ_c bzw $\omega_c = \omega(\lambda_c)$
- Zunächst sei aber $Im(\omega_c) = 0$, d.h. die Bifurkation ist stationär

Bifurkations-Analyse II

- Entwickle hierzu \mathbf{x} und $\lambda - \lambda_c$ nach ε :

$$\mathbf{x} = \varepsilon \mathbf{x}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{x}_2 + \dots$$

$$\lambda - \lambda_c = \varepsilon \gamma_1 + \varepsilon^2 \gamma_2 + \dots$$

Bifurkations-Analyse II

- Da $Im(\omega_c) = 0$, ändert sich \mathbf{x} nicht mit der Zeit, also entwickle auch die Zeit

$$\frac{d}{dt} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \dots$$

Bifurkations-Analyse II

- Da $Im(\omega_c) = 0$, ändert sich \mathbf{x} nicht mit der Zeit, also entwickle auch die Zeit

$$\frac{d}{dt} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \dots$$

⇒ Multiskalen-Entwicklung (*multiscale perturbation expansion*)

Bifurkations-Analyse III

Einsetzen ergibt:

- Ordnung $O(\varepsilon)$

$$\mathcal{L}(\lambda_c) \cdot \mathbf{x}_1 = 0$$

Bifurkations-Analyse III

Einsetzen ergibt:

- Ordnung $O(\varepsilon)$

$$\mathcal{L}(\lambda_c) \cdot \mathbf{x}_1 = 0$$

- Ordnung $O(\varepsilon^2)$

$$\mathcal{L}(\lambda_c) \cdot \mathbf{x}_2 = -\gamma_1 \mathcal{L}_\lambda(\lambda_c) \cdot \mathbf{x}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{h}_{\mathbf{xx}} \cdot \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1 + \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \tau_1} = \mathbf{q}_2$$

Bifurkations-Analyse IV

- Ordnung $O(\varepsilon^3)$: kompliziert

Bifurkations-Analyse IV

- Ordnung $O(\varepsilon^3)$: kompliziert oder einfach:

$$\mathcal{L}(\lambda_c) \cdot \mathbf{x}_3 = \mathbf{q}_3$$

Amplitudengleichung I

- Betrachte

$$\mathcal{L}(\lambda_c) \cdot \mathbf{x}_{2/3} = \mathbf{q}_{2/3}$$

- Stelle $\mathbf{x}_{2/3}$ als Produkt einer Phase $c(\tau_1, \tau_2, \dots)$ und eines Vektors \mathbf{u} dar:

$$\mathbf{x}_{2/3} = c(\tau_1, \tau_2, \dots) \mathbf{u}$$

Amplitudengleichung II

- Dies ergibt für die Ordnung $O(\varepsilon^2)$:

$$\mathcal{L}(\lambda_c) \cdot \mathbf{x}_2 = -c\gamma_1 \mathcal{L}_\lambda(\lambda_c) \cdot \mathbf{x}_1 - \frac{1}{2}c^2 \mathbf{h}_{\mathbf{xx}}(\lambda_c) \cdot \mathbf{uu} + \frac{\partial c}{\partial \tau_1} \mathbf{u}$$

oder

Amplitudengleichung II

- Dies ergibt für die Ordnung $O(\varepsilon^2)$:

$$\mathcal{L}(\lambda_c) \cdot \mathbf{x}_2 = -c\gamma_1 \mathcal{L}_\lambda(\lambda_c) \cdot \mathbf{x}_1 - \frac{1}{2}c^2 \mathbf{h}_{\mathbf{xx}}(\lambda_c) \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} + \frac{\partial c}{\partial \tau_1} \mathbf{u}$$

oder (nach etwas linearer Algebra)

Amplitudengleichung II

- Dies ergibt für die Ordnung $O(\varepsilon^2)$:

$$\mathcal{L}(\lambda_c) \cdot \mathbf{x}_2 = -c\gamma_1 \mathcal{L}_\lambda(\lambda_c) \cdot \mathbf{x}_1 - \frac{1}{2}c^2 \mathbf{h}_{\text{xx}}(\lambda_c) \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} + \frac{\partial c}{\partial \tau_1} \mathbf{u}$$

oder (nach etwas linearer Algebra)

$$\frac{\partial c}{\partial \tau_1} = \gamma_1 P_1 c - P_2 c^2$$

Amplitudengleichung III

- Einsetzen der Entwicklung von $\lambda - \lambda_c$ ergibt schließlich:

$$\frac{dz}{dt} = (\lambda - \lambda_c)P_1z - P_2z^2$$

Amplitudengleichung III

- Einsetzen der Entwicklung von $\lambda - \lambda_c$ ergibt schließlich:

$$\frac{dz}{dt} = (\lambda - \lambda_c)P_1z - P_2z^2$$

- Dies ist eine Amplitudengleichung in der skalierten Amplitude

Amplitudengleichung III

- Einsetzen der Entwicklung von $\lambda - \lambda_c$ ergibt schließlich:

$$\frac{dz}{dt} = (\lambda - \lambda_c)P_1z - P_2z^2$$

- Dies ist eine Amplitudengleichung in der skalierten Amplitude

$$z = \varepsilon C$$

Amplitudengleichung IV

- Sei nun $Im(\omega_c) \neq 0$. Dann ist die Bifurkation periodisch (Hopf-Bifurkation) und \mathbf{x} oszilliert auf einer schnellen Zeitskala $2\pi Im(\omega_c)$.
- Um diese schnelle Zeitskala T zu berücksichtigen, muss die Entwicklung von $\frac{d}{dt}$ um diese ergänzt werden:

$$\frac{d}{dt} = Im(\omega_c) \frac{\partial}{\partial T} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \dots$$

Amplitudengleichung V

- Die sich ergebende Amplitudengleichung lautet:

$$\frac{dz}{dt} = (\lambda - \lambda_c)P_1 z - P_3 |z|^2 z$$

Amplitudengleichung V

- Die sich ergebende Amplitudengleichung lautet:

$$\frac{dz}{dt} = (\lambda - \lambda_c)P_1 z - P_3 |z|^2 z$$

- vgl. Ginzburg-Landau-Gleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (\lambda - \lambda_c)z + (1 + i\alpha)\Delta z - (1 + i\beta)|z|^2 z$$

Amplitudengleichung V

- Die sich ergebende Amplitudengleichung lautet:

$$\frac{dz}{dt} = (\lambda - \lambda_c)P_1 z - P_3 |z|^2 z$$

- vgl. Ginzburg-Landau-Gleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (\lambda - \lambda_c)z + (1 + i\alpha)\Delta z - (1 + i\beta)|z|^2 z$$

ähnlich!!

Räumliche Systeme I

- Allgemeinster Fall:

$$\frac{dX_i(\mathbf{r}, t)}{dt} = F_i(X_j(\mathbf{r}, t), \nabla^k X_j(\mathbf{r}, t), \lambda)$$

Räumliche Systeme II

- Analog zu den zeit-periodischen Bifurkationen ist bei räumlich ausgedehnten Systemen nun auch die Ortsabhängigkeit störungstheoretisch zu entwickeln:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho} + \dots$$

Räumliche Systeme III

- Als Amplitudengleichung ergibt sich nun die komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung (CGLE):

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (\lambda - \lambda_c)z + (1 + i\alpha)\Delta z - (1 + i\beta)|z|^2 z$$

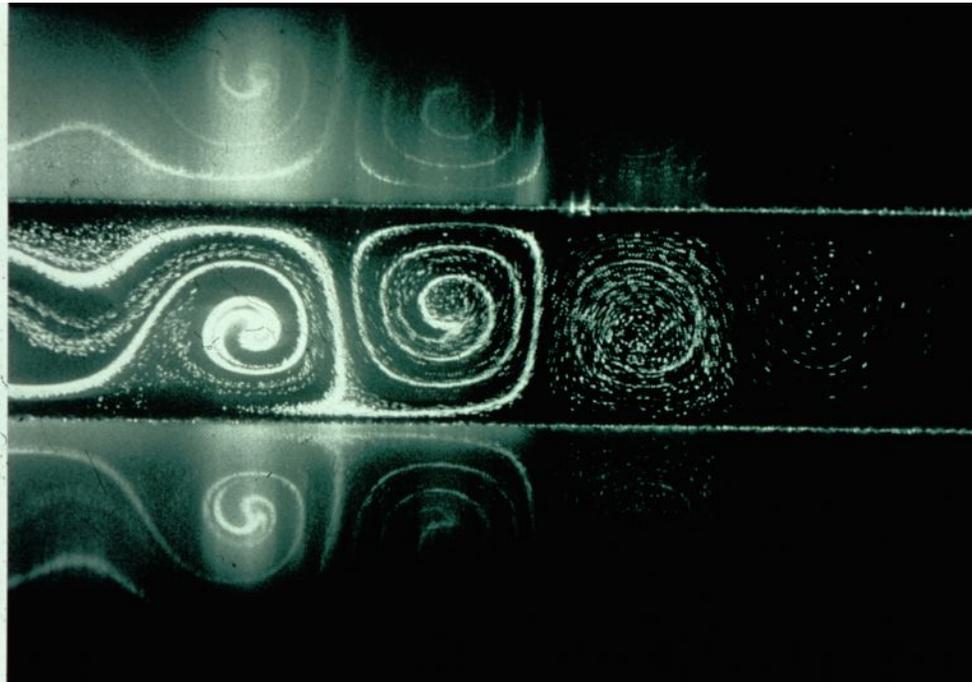
- Bei ihrer Ableitung wurde kein spezielles System betrachtet, d.h. die komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung ist universell.

Zurück zu Bénard

- Hier liefert die CGLE leider keine passenden Ergebnisse
⇒ Newel-Whitehead-Gleichung



Nochmal Bénard



Aber wie kommt es nun zu...?



So...

