

**Script zur Vorlesung :**

**Theoretische Physik I: Klassische Mechanik**

**Vorlesung SS 07**

**Prof. Dr. Jens Timmer**

**September 22, 2013**

# Contents

<b>0</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>1. Woche: Newtonsche Mechanik: Grundlegende Begriffe</b>	<b>5</b>
1.1	Die Newtonschen Gesetze . . . . .	6
1.2	Wichtige Kraftgesetze . . . . .	9
1.3	Wegintegrale, Potentiale & Energiesatz . . . . .	10
<b>2</b>	<b>2. Woche: Newtonsche Mechanik: Mehr-Körper-Probleme</b>	<b>15</b>
2.1	Mehrere Punktteilchen in Wechselwirkung . . . . .	15
2.2	Zwei-Körper-Problem . . . . .	21
<b>3</b>	<b>3. Woche: Newtonsche Mechanik: Kepler-Problem &amp; Streuung</b>	<b>28</b>
3.1	Kepler Problem . . . . .	28
3.2	Sreuung . . . . .	34
<b>4</b>	<b>4. Woche: Newtonsche Mechanik: Lineare Schwingungen</b>	<b>41</b>
4.1	Eindimensionale Systeme . . . . .	41
4.2	Der allgemeine harmonische Fall . . . . .	46
4.3	Zwei Beispiele . . . . .	50
<b>5</b>	<b>5. Woche: Newtonsche Mechanik: Für Genießer</b>	<b>54</b>
5.1	Mechanische Ähnlichkeit . . . . .	54
5.2	Virialsatz . . . . .	55
5.3	Scheinkräfte . . . . .	58
<b>6</b>	<b>6. Woche: Lagrangesche Mechanik: Gleichungen 1. &amp; 2. Art</b>	<b>60</b>
6.1	Lagrange Gleichungen 1. Art . . . . .	62
6.2	Lagrange Gleichungen 2. Art . . . . .	69
<b>7</b>	<b>7. Woche: Lagrangesche Mechanik: Anwendungen</b>	<b>74</b>
7.1	Newton revisited . . . . .	74
7.2	Lagrange 1. vs. 2. Art . . . . .	76
7.3	Das sphärische Pendel . . . . .	77
7.4	Holonom-rheonome Zwangsbedingungen: Die Schaukel . . . . .	79
7.5	Nicht-holonome Zwangsbedingungen . . . . .	83
7.6	Foucaultsches Pendel . . . . .	83
<b>8</b>	<b>8. Woche: Lagrangesche Mechanik: Der starre Körper I</b>	<b>86</b>
8.1	Kinematik . . . . .	87
8.2	Kinetische Energie & Trägheitstensoren . . . . .	90
8.3	Drehimpuls, Eulersche Kreiselgleichungen, freier symmetrischer Kreisel	95
<b>9</b>	<b>9. Woche: Lagrangesche Mechanik: Der starre Körper II</b>	<b>99</b>
9.1	Bewegungsgleichungen für Eulersche Winkel . . . . .	99
9.2	Der schwere Kreisel . . . . .	99
9.3	Zwei Beispiele . . . . .	103

<b>10</b>	<b>10. Woche: Lagrangesche Mechanik: Für Geniesser</b>	<b>104</b>
10.1	Noethersches Theorem . . . . .	104
10.2	Das Hamiltonsche Prinzip . . . . .	109
10.3	Mechanische Ähnlichkeit revisited . . . . .	115
10.4	Kanonisch konjugierter Impuls im magnetischen Falle . . . . .	116
10.5	Uneindeutigkeit der Lagrange-Funktion . . . . .	117
<b>11</b>	<b>11. Woche: Hamiltonsche Mechanik: Grundlagen</b>	<b>118</b>
11.1	Von Lagrange zu Hamilton . . . . .	118
11.2	Hamiltonsche Bewegungsgleichungen . . . . .	121
11.3	Theorem von Liouville . . . . .	125
11.4	Poissonklammern . . . . .	126
<b>12</b>	<b>12. Woche: Hamiltonsche Mechanik: Für Genießer</b>	<b>128</b>
12.1	Hamiltonsche Gleichungen aus Variationsprinzip . . . . .	128
12.2	Kanonische Transformationen . . . . .	129
12.3	Hamilton-Jacobi . . . . .	131
12.4	Integrale Systeme und Hamiltonsches Chaos . . . . .	132
<b>13</b>	<b>13. Woche: Dissipative Systeme</b>	<b>135</b>
13.1	Grenzzyklen . . . . .	135
13.2	Chaotische Systeme . . . . .	139
13.3	Abschlußbemerkungen . . . . .	142

# 0 Einleitung

Org-Krams:

- homepage ausdrucken
- Übungen, wer braucht sie in Hardware ? Viele Stunden darauf verwenden. Nicht versuchen es mit Google zu lösen. Wird zu Katastrophe führen. Abgeben in 2er-Gruppen.
- Klausur
- Scheinkriterium
- Verschiedene Kollegen, verschiedene Schwerpunkte. Prüfungsprotokolle
- FOLIE Inhaltsverzeichnis
- Bemerkung Vektorpfeile und Nomenklatur
- Fragen bei Unklarheiten
- Bitte pünktlich kommen
- Hermeneutisches Problem

Literatur:

- J. Honerkamp, H. Römer: Klassische Theoretische Physik  
Online: [http://www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/82/pdf/82\\_1.pdf](http://www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/82/pdf/82_1.pdf)
- F. Kuypers: Klassische Mechanik
- F. Scheck: Theoretische Physik 1. Mechanik
- H. Goldstein: Klassische Mechanik, formaler
- V.I. Arnol'd: Mathematical Methods of Classical Mechanics, formaler

Klassische Mechanik ist grundlegend für

- gesamte Physik
  - Formaler Rahmen der Elektrodynamik
  - Grundlage und Unterschied Quantenmechanik
  - Unterschied Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie
- Technik: Maschinen- und Brückenbau

# 1 1. Woche: Newtonsche Mechanik: Grundlegende Begriffe

## Raum und Zeit in der Klassischen Mechanik

Zeit:

- $t \in R$ , weltweit identisch
- Weltweite Messung durch Transport von Eichuhren
- Das ändert sich in der speziellen Relativitätstheorie

Raum:

- Affiner Raum
  - Menge  $A$  von Punkten  $P, Q, R$
  - Vektorraum  $V^3$  mit Vektoren  $\vec{x}, \vec{y}$
- Es gelte:  
Geordnetem Punktepaar  $(P, Q)$  ist Vektor  $\vec{x} = \vec{PQ}$  aus  $V^3$  zugeordnet  
Für jeden Punkt  $P$  und zu jedem  $\vec{x}$  gibt es ein  $Q$ , so dass  $\vec{PQ} = \vec{x}$  gilt  
Für drei Punkte  $P, Q, R$  gilt:

$$\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$$

- Wähle Ursprung  $O$   
Wähle Basis  $(\vec{e}_i), i = 1, 2, 3$   
Dann

$$\vec{OP} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i$$

Dann  $x_i$  Koordinaten bezüglich Koordinatensystem  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

- Gegeben Koordinatensystem. Dann  
Ortsvektor:

$$\vec{r}(t) = \sum x_i(t) \vec{e}_i$$

Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}$$

Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \ddot{\vec{r}}$$

- Beispiel:  
Geradlinig-gleichförmige Bewegung

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= r_0 + v_0 t \\ v(t) &= v_0 \\ a(t) &= 0 \end{aligned}$$

## 1.1 Die Newtonschen Gesetze

Newton:

- \* 1643, † 1727
- Hauptwerk: 1686: "Philosophiae naturalis principia mathematica"

Die Newtonschen Gesetze

1. Wirken keine Kräfte, verharrt ein Körper in Ruhe oder im Zustand geradlinig-gleichförmiger Bewegung.
2. Eine Kraft  $\vec{F}$  bewirkt eine Beschleunigung

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

3. "actio gleich reactio"

Sei  $\vec{F}_{ij}$  die Kraft, die Körper  $j$  auf Körper  $i$  ausübt, so gilt:

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$$

Kommentare:

- Still acute:

PRL 98, 150801 (2007)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending  
13 APRIL 2007

### Laboratory Test of Newton's Second Law for Small Accelerations

J. H. Gundlach, S. Schlamminger, C. D. Spitzer, and K.-Y. Choi

Center for Experimental Nuclear Physics and Astrophysics, University of Washington, Seattle, Washington 98195, USA

B. A. Woodahl

Physics Department, Indiana University-Purdue University, Indianapolis, Indiana 46202, USA

J. J. Coy

Earth and Space Science Department, Saint Joseph's College, Rensselaer, Indiana 47978, USA

E. Fischbach

Physics Department, Purdue University, West Lafayette, Indiana 47907, USA

(Received 12 February 2007; published 13 April 2007)

We have tested the proportionality of force and acceleration in Newton's second law,  $F = ma$ , in the limit of small forces and accelerations. Our tests reach well below the acceleration scales relevant to understanding several current astrophysical puzzles such as the flatness of galactic rotation curves, the Pioneer anomaly, and the Hubble acceleration. We find good agreement with Newton's second law at accelerations as small as  $5 \times 10^{-14} \text{ m/s}^2$ .

DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.150801

PACS numbers: 06.30.Gv, 04.80.Cc

Newton's second law is the equation of motion defining the field of dynamics. In its nonrelativistic form,  $\vec{F} = m\vec{a}$  is perhaps the most famous and most often used equation of physics. Together with its relativistic and quantum mechanical variants, this law is implicitly tested in many applications and experiments, and its validity is simply assumed at all acceleration scales. Any deviation from  $\vec{F} = m\vec{a}$  would have profound consequences as it would

standard Newtonian dynamics. The functional form of the transition between the two regimes is not specified. A smooth transition can be obtained by multiplying the right side of  $\vec{F} = m\vec{a}$  by  $\mu(a/a_0) = a/a_0(1 + a^2/a_0^2)^{-1/2}$ , so that for  $a \gg a_0$  the function  $\mu \approx 1$  and standard Newtonian mechanics is recovered. The characteristic acceleration  $a_0$  was determined from fits [4] to galactic rotation curves to be  $a_0 \approx 1.2 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$ .

- 1. NG widerspricht all unserer Erfahrung, aber ordnet sie am Ende sinnig
  - Erstes Newtonsche Gesetz definiert "Nullelement" in der Menge der Kräfte, die "Nullelement" in der Menge der Bewegung nach sich zieht.
  - 1. Newtonsche Gesetz postuliert Trägheitsprinzip

- 1. Gesetz macht nur Sinn bei Angabe von Bezugssystem
  - \* Es kann nicht in allen gelten:  
Gilt es in System  $S'$ , kann es in relativ beschleunigtem System  $S'$  nicht gelten:  
Körper erfährt dort Beschleunigung, obwohl keine Kraft auf ihn wirkt.
  - \* Bezugssystem, in dem 1. Newtonsches Gesetz gilt heißt Inertialsystem
    - Existenz vor der Hand unklar.
    - Für einzelne Körper existiert Koordinatentransformation, so dass Bahnkurve  $r(t)$  gradlinig-gleichförmig, muss aber für alle Körper gelten.
    - Koordinatensystem relativ zum Fixsternhimmel ist in guter Näherung Inertialsystem
    - Koordinatensystem mit Bezugspunkt auf Erdoberfläche ist weniger gut:
      - Rotation der Erde um Sonne
      - Rotation der Erde um sich selbst
  - \* Auswirkungen der Abweichung von Inertialsystem werden in Kapitel 5.3 behandelt.
- Relativitätsprinzip:
  - Sei in  $S$  Bahnkurve  $\vec{r}(t)$
  - Sei  $S'$  um  $\vec{r}_0$  gegen  $S$  verschoben und bewege sich mit  $\vec{v}_0$
  - Dann gilt die Galileo-Transformtion:
 
$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$
  - Relativitätsprinzip: Alle Inertialsysteme sind physikalisch gleichwertig
  - Die Gesetze der Klassischen Mechanik müssen invariant unter der Galileo-Transformation sein
- 2. NG:
 

Jede Abweichung vom Nullelement der Kräfte führt zu Beschleunigungen

  - "Suchet die Kräfte": Ein komplettes Forschungsprogramm
  - Sind alle Kräfte  $\vec{F}_i$  bekannt, ergibt  $m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$  die Dynamik.
    - \*  $m$ : träge Masse, im Unterschied zur schweren Masse, siehe später. Ausgangspunkt Allgemeine Relativitätstheorie
    - \* Kräfte addieren sich wie Vektoren (Kräfteparallelogramm)
  - Ontologie:
    - \*  $\vec{F}_i$ : Ursachen
    - \*  $m\vec{a}$ : Wirkung
- Merke:
 

Die Newtonschen Gesetze stellen eine immense Abstraktionsleistung dar

## Historische Anmerkung: Aristotelische Mechanik

”Alle Dinge haben ihren Platz, den sie ihrer Natur gemäß einzunehmen bestrebt sind”

Zweigeteilte Welt:

- Auf der Erde:
  - ”Natürliche Bewegung”, schwere Körper nach unten, leichte nach oben
  - ”Erzwungene Bewegung”  $mv = F$ , setzt direkten Kontakt voraus
- Gestirne: Bewegung nach ”ewiger Harmonie”: Gleichförmige Kreisbewegung

Kritik zu seiner Zeit

- Sternschnuppen
- Speerwurf
- Kein Grund, überheblich zu sein, Newton hat auch seine Grenzen

Newton vereinheitlicht zwei vorher getrennte Bereiche. Seine Theorie gilt für

- Bewegung der Planeten
- den fallenden Apfel

Vereinheitlichung als Ansatz hat sich als bewährt

- Elektromagnetismus
- EM, schwache & starke Kraft
- Vereinheitlichung (EM, schwache & starke Kraft) mit Gravitation aktuelles Forschungsgebiet

## Praxis der Newtonschen Mechanik

- $\vec{r}(t)$  aus  $m\vec{a}(t) = \vec{F}(t)$  berechenbar, wenn
  - $\vec{F}(t)$  bekannt
  - $\vec{r}(0), \vec{v}(0)$  bekannt
- Im allgemeinen kann  $\vec{F}(t)$  beliebig kompliziert sein, z.B. von Vorgeschichte abhängen.
- Häufig:  $F(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$

Dann

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$$

die Bewegungsgleichung, eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung

- Gilt sogar  $\vec{F}(\vec{r}(t))$ , so handelt es sich um ein Kraftfeld:  $\vec{F} : E^3 \rightarrow V^3$ , denke an Gravitationsfeld.

## Den Spiess umdrehen

Kennt man die verursachende Kraft nicht, aber die Bahnkurve  $\vec{r}(t)$ , lässt sich die Kraft ermitteln.

So geschehen durch Newton für die Gravitationskraft.

1. Mo.

## 1.2 Wichtige Kraftgesetze

Der allgemeine Fall  $\vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$ , abhängig von

- Ort
- Geschwindigkeit, denke an Lorentz-Kraft
- Zeit

Beispiele:

- (i.)  $\vec{F} = \vec{F}_0 = \vec{const}$

Oft gute Näherung in kleinen Raumzeitbereichen.

Beispiel: Gravitationsfeld der Erde  $\vec{F} = m\vec{g}$ ,  $m$  schwere Masse,  $\vec{g} = 9.81m/s^2$

Experimentell bestens bestätigt: schwere Masse = träge Masse.

Ausgangspunkt der Allgemeinen Relativitätstheorie

Lösung von

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_0$$

durch zweimalige Integration mit Anfangswerten  $\vec{v}_0$  und  $\vec{r}_0$

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2m}\vec{F}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

- (ii.) Harmonisches Kraftgesetz

Linear, zeitunabhängige Kraft:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -D\vec{r}$$

Gilt bei Federpendel oder Pendel bei kleiner Auslenkung

Bewegungsgleichung

$$m\ddot{r} = -Dr$$

Allgemeine Lösung

$$r(t) = a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{D}{m}$$

Wird Reibung mit  $-k\dot{r}$  und zeitabhängige äußere Kraft  $F(t)$  hinzugefügt, ergibt sich

$$m\ddot{r} + k\dot{r} + Dr = F(t)$$

eine erzwungene Schwingung mit Resonanzphänomenen, die in Kapitel 4 behandelt werden.

- (iii.) Gravitationskraft

Newtons grosser Verdienst

Kraft von Masse  $m_2$  auf  $m_1$

$$\vec{F}_{G_{12}} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}, \quad \vec{r} = P_1 \vec{P}_2, \quad \gamma = 6.667 \times 10^{-11} m^3 / (kgs^2)$$

(iv.) Lorentz-Kraft: geschwindigkeitsabhängig

Elektrisches Feld  $\vec{E}(r, t)$ , Magnetfeld  $\vec{B}(r, t)$

$$F_L(r, \dot{r}, t) = e(E(r, t) + \dot{r} \times B(r, t))$$

(v.) Coulomb-Kraft

Ladungen  $q_1, q_2$

$$\vec{F}_{C12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$$

Betrachte 2 Protonen:

- Anziehung auf Grund der Gravitation
- Abstossung auf Grund von Coulomb

Abstossung  $\sim 10^{36}$  mal stärker als Anziehung: Gravitation auf kleinen Skalen i.d.R. vernachlässigbar

Betrachte Universum:

- Recht homogen gilt: Anzahl negativer Ladungen = Anzahl positiver Ladungen  
Coulomb mittelt sich raus
- Gravitation immer anziehend: Spielt auf großen Skalen den Haupteffekt

(vi) Reibungs-Kräfte

Gleitreibung fester Körper

$$\vec{F}_R = -\mu |F_N| \frac{\vec{v}}{v}$$

Für viskose, Stokes'sche Reibung, kleine Reynoldszahl

$$\vec{F}_R = -\kappa \vec{v}$$

Bei "Luftreibung", große Reynoldszahl

$$\vec{F}_R = -\frac{1}{2} c_w \rho A v^2 \frac{\vec{v}}{v}$$

### 1.3 Wegintegrale, Potentiale & Energiesatz

Betrachte Massenpunkt in zeitunabhängigem Kraftfeld.

Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{r}(t) = F(r(t))$$

Multipliziere mit  $\dot{r}$  und integriere über  $t$  von  $t_1$  bis  $t_2$

- LHS:

$$m \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{r} \ddot{r} = \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} (\dot{r}^2) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \Big|_{t_1}^{t_2} = T(t_2) - T(t_1)$$

mit  $T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$  kinetische Energie

- RHS:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt F(r(t)) \frac{dr(t)}{dt}$$

Sei  $r_1 = r(t_1)$ ,  $r_2 = r(t_2)$  und  $C$  Bahn zwischen  $r_1$  und  $r_2$ , so gilt

$$\int_{t_1}^{t_2} dt F(r(t)) \frac{dr(t)}{dt} = \int_{r_1, C}^{r_2} F(r) dr$$

$$\int_{r_1, C}^{r_2} F(r) dr = A_{12}(r_1, r_2, C, F) = A_{12}(C)$$

stellt ein Wegintegral dar.

- Wegintegral hängt von  $C$  ab, nicht von  $\vec{r}(t)$ . Betrachte  $\tau$  mit  $t = t(\tau)$

$$\int_{\tau(t_1)}^{\tau(t_2)} F(r(t(\tau))) \frac{dr(t(\tau))}{d\tau} d\tau = \int_{\tau(t_1)}^{\tau(t_2)} F(r(t(\tau))) \frac{dr(t(\tau))}{dt} \frac{dt}{d\tau} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} F(r(t)) \frac{dr(t)}{dt} dt$$

Eigenschaften von Vektorfeldern

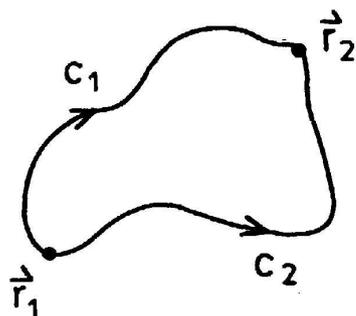
- Vektorfeld heißt konservativ, wenn das Wegintegral

$$\int_{r_1, C}^{r_2} F(r) dr = A_{12}(r_1, r_2, \cdot, F)$$

unabhängig von  $C$  ist.

- Vektorfeld  $F(r)$  ist genau dann konservativ, wenn Wegintegral über jeden geschlossenen Weg verschwindet.

– Ist  $F(r)$  konservativ, so gilt



Zwei Wege von  $r_1$  nach  $r_2$

$$\int_{r_1, C_1}^{r_2} F(r) dr = \int_{r_1, C_2}^{r_2} F(r) dr = - \int_{r_2, -C_2}^{r_1} F(r) dr$$

ergo

$$\int_{C_1 \cup -C_2} F(r) dr = 0$$

– Verschwindet Integral, drehe obiges Argument  $\forall$  geschlossenen Wege, auf denen  $r_1, r_2$  liegen, um.

- Vektorfeld ist genau dann konservativ, wenn es ein skalares Feld  $U(r)$  gibt mit:

$$F = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}\right)$$

Beweis als Uebung

Dieses skalare Feld  $U$  heißt Potential, Minuszeichen Konvention.

- Ist  $F$  konservativ, so gilt:

$$\nabla \times F = 0$$

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_k}{\partial x_j}$$

Wenn  $F_k = \frac{\partial U}{\partial x_k}$  dann

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} = 0$$

- Gilt

$$\nabla \times F \neq 0$$

so ist  $F$  nicht konservativ.

- Final: Gilt in einfach zusammenhängendem Gebiet

$$\nabla \times F = 0$$

so existiert  $U$  mit

$$F = -\nabla U$$

## Der Energiesatz

Erinnere Wegintegral, betrachte konservatives Kraftfeld

$$F(r) = -\nabla U(r), \quad \int_{r_1}^{r_2} dr F(r) = U(r_2) - U(r_1)$$

Somit

$$T(\dot{r}(t_2)) + U(r(t_2)) = T(\dot{r}(t_1)) + U(r(t_1))$$

Ergo: Die Größe

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2(t) + U(r(t))$$

ist für konservative Kraftfelder eine Erhaltungsgröße.

- $E$ : Energie
- $T$ : Kinetische Energie
- $U$ : Potentielle Energie

Allgemein ist

$$A = \int_{r_1, C}^{r_2} F(r) dr$$

die von Kraft  $F$  am Körper geleistete Arbeit.

Beispiele: (nicht) konservativer Kraftfelder:

- Gravitationskraft

$$U(r) = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r}$$

- Zentralkraftfelder

- rotationssymmetrisch:

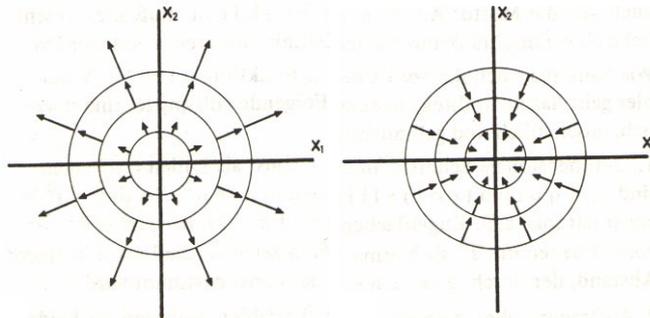
$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}/r$$

konservativ

- Allgemeiner Fall

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r})\vec{r}/r$$

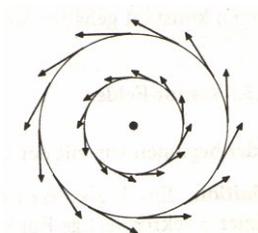
nicht konservativ



- Harmonische Kraft

$$U(r) = \frac{D}{2}r^2$$

- Nichtkonservatives Feld:



Betrachte:  $F = (y, -x, 0)$ ,  $(\nabla \times F) = (0, 0, -2)$

- Besonders schön:

$$F = \frac{1}{x^2 + y^2}(y, -x, 0) \text{ auf } R^3 \setminus (0, 0, z)$$

siehe Uebung

- Eindimensionale Dynamik

$F(x)$  ist immer konservativ. Grund: es existiert immer  $U(x)$  mit

$$F(x) = -\frac{d}{dx}U(x)$$

nämlich die Stammfunktion von  $-F(x)$ .

Bewegungsgleichung direkt lösbar

- Da Kraftfeld konservativ, nutze Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E = \text{const}$$

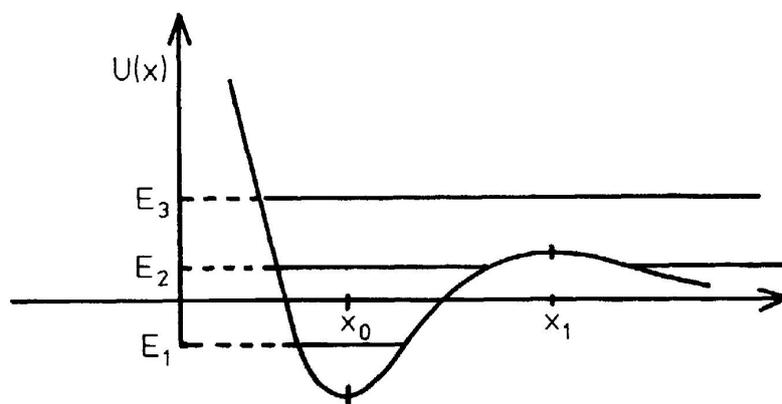
Damit:

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2/m(E - U(x(t)))}$$

Dieses heißt "Erstes Intregral"

$$\int_{t_0}^t \frac{\dot{x} dt'}{\sqrt{2/m(E - U(x(t)))}} = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{2/m(E - U(x'))}} = \int_{t_0}^t dt' = t - t_0$$

- Ergibt:  $x = x(t; E, x_0)$ ,  $v_0 = \sqrt{2/m(E - U(x_0))}$
- Da  $E = T + U \geq U$



**Ein Beispiel einer Potentialfunktion für eine eindimensionale Bewegung mit den erlaubten Aufenthaltsbereichen für verschiedene Energien**

Lessons learnt:

- Newtonsche Gesetze: Immense Abstraktionsleistung
- Newtonsche Gesetze bilden selbstkonsistenten Rahmen der Mechanik
- Forschungsprogramm: Suchet die Kräfte
- Konservative Kraftfelder haben Potential
- In konservativen Kraftfeldern gilt Energieerhaltung

1. Mi.

## 2 2. Woche: Newtonsche Mechanik: Mehr-Körper-Probleme

### 2.1 Mehrere Punktteilchen in Wechselwirkung

- Betrachte  $N$  Massenpunkte

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) = \vec{F}_i(t)$$

- Sei  $\vec{F}_i(t)$  von der Form

$$\vec{F}_i(t) = \vec{F}_i(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t))$$

dann ist

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) = \vec{F}_i(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t))$$

ein System von  $3N$  DGls. 2. Ordnung.

- Analog zu oben ergibt sich die kinetische Gesamtenergie zu

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2(t)$$

- Kräfte aus Potential ?

Betrachte  $3N$  dimensionalen Vektorraum

$$\begin{aligned} Z &= V^3 \oplus \dots \oplus V^3 \\ Z &= \{z = (\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t))\} \end{aligned}$$

–  $Z = V^{3N}$  heißt Konfigurationsraum

– Bahnkurve:  $t \mapsto z$

– Kraftfeld:  $V^{3N} \mapsto V^{3N}$

- Analog zu oben:

– Kraftfeld ist konservativ, wenn

$$\int_{z_1, C}^{z_2} \underline{F} d\underline{z}$$

unabhängig vom Weg ist.

–  $\underline{F}(\underline{z})$  genau dann konservativ, wenn Potential  $U(\underline{z})$  existiert, mit

$$\underline{F} = -\underline{\nabla}U$$

– Ist Kraftfeld konservativ, ist die Gesamtenergie:

$$E = T(t) + U(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t))$$

erhalten.

Beispiel: Zwei-Körper-Problem

- Betrachte zwei Massenpunkte an  $r_1$  und  $r_2$

Kraft hänge ab vom Abstandsbetrag  $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = r$

Richtung der Kraft in Verbindungslinie

- Dann gilt mit  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = F_1(r_1, r_2) = -f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = F_2(r_1, r_2) = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

$F_1(r_1, r_2) = -F_2(r_1, r_2)$  folgt aus drittem Newtonschen Gesetz.

- $(F_1, F_2)$  ist ein konservatives Kraftfeld.

Übung

In der Regel gilt:

$$F_i(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t)) = F_i^{\text{äu}}(\vec{r}_i(t)) + \sum_{i \neq j}^N F_{ij}^{\text{in}}(\vec{r}_i(t), \vec{r}_j(t))$$

mit

- $F_i^{\text{äu}}$  : äußere Kraft
- $F_{ij}^{\text{in}}$  : innere Kräfte

**Impuls**

- Wichtige Grösse:

$$\vec{p}_i(t) := m \dot{\vec{r}}_i(t)$$

$N$  Teilchen Gesamtimpuls:

$$\vec{P} := \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

- Ortsvektor  $R$  des Schwerpunktes definiert durch:

$$\vec{R} := \sum m_i \vec{r}_i / \sum m_i$$

Dann

$$\vec{P} = M \dot{\vec{R}}, \quad M = \sum m_i$$

Merke:

$\vec{P}$  ist Impuls des Systems der  $N$  Massepunkte, im Schwerpunkt zusammengefaßt.

- 2. Newtonsche Gesetz

$$\dot{\vec{p}}_i(t) = F_i(t)$$

Allgemeinere Formulierung, die auch Masseänderungen berücksichtigt, z.B. Rakete, die Treibstoff verbrennt.

- Gelten Bewegungsgleichungen der Form:

$$\dot{p}_i = F_i^{\text{äu}} + \sum_{i \neq j} F_{ij}^{\text{in}}$$

so gilt wegen  $F_{ij} = -F_{ji}$

$$\sum_i \dot{p}_i = \dot{P} = \sum F_i^{\text{äu}}$$

Merke: "Änderung des Gesamtimpulses ist gleich Summe der äußeren Kräfte"

- Falls  $\sum F_i^{\text{äu}} = 0$ , gilt

$$\dot{P} = M \ddot{R} = 0$$

- Gesamtimpuls ist erhaltene Größe
- Schwerpunkt bewegt sich geradlinig-gleichförmig

- Gilt ferner

$$F_i^{\text{äu}} = 0$$

heißt das System abgeschlossen

Beispiel: Zwei-Körper-Problem revisited

- Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{r}_1 &= F_1(r_1, r_2) = -f(r) \frac{\vec{r}}{r} \\ m_2 \ddot{r}_2 &= F_2(r_1, r_2) = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned}$$

Abgeschlossenes System

- Addition der Gleichungen:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = M \ddot{\vec{R}} = 0$$

Lösung der Bewegungsgleichung für Schwerpunkt:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t$$

Damit 3 der 6 DGLs gelöst

- Für die restlichen, Umformung, so daß Bewegungsgleichung für Relativbewegung  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  entsteht.

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \left( -\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) f(r) \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{1}{\mu} f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

mit der reduzierten Masse

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

- Bewegungsgleichung der Relativbewegung:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

Struktur

- Kraftzentrum im Ursprung
- EIN Teilchen mit Masse  $\mu$

- Energiezerlegung:

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 + U(r) = E_s + E_{rel} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \left( \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + U(r) \right)$$

- Merke:

Statt  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  betrachte  $(\vec{R}, \vec{r})$

- Liegen äußere Kräfte vor, gelingt die Aufspaltung in Schwerpunkts- und Relativbewegung in der Regel nicht.

## Drehimpuls

- Sei  $\vec{r}$  Ortsvektor bezogen auf Ursprung  $O$

Dann ist Drehimpuls  $\vec{L}(t)$  bezüglich Ursprung  $O$ :

$$\vec{L}(t) := \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = m \vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)$$

- Zeitableitung:

$$\dot{\vec{L}}(t) := m\dot{\vec{r}}(t) \times \dot{\vec{r}}(t) + m\vec{r}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{r}(t) \times m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}(t) =: \vec{N}(t)$$

$\vec{N}(t)$  heißt Drehmoment der Kraft  $\vec{F}$  bezüglich Ursprung  $O$ .

- Eigenschaften:
  - Drehmoment ändert Drehimpuls so wie Kraft Impuls verändert
  - Drehimpuls erhalten, wenn  $\vec{N}(t) = 0$
  - Das ist z.B. der Fall, wenn  $\vec{F}(r)$  parallel zu  $\vec{r}(t)$ , i.e. Zentralkraftfeld
  - Zentralkraftfeld braucht weder rotationssymmetrisch noch zeitunabhängig zu sein. Erinnerung, das war bei Konservativität anders

## $N$ Teilchen Fall

- Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{L}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i(t)$$

Zeitliche Veränderung:

$$\dot{\vec{L}}(t) = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{L}}_i(t) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i(t) \times m_i \ddot{\vec{r}}_i(t)$$

- Mit

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) = F_i^{\text{äu}}(\vec{r}_i) + \sum_{i \neq j} F_{ij}^{\text{in}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

folgt

$$\dot{\vec{L}}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times F_i^{\text{äu}}(\vec{r}_i) + \sum_{i \neq j} \vec{r}_i \times F_{ij}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

2. Term:

$$\vec{r}_i \times \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}$$

da  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

- Ist nun  $F_{ij}$  parallel zu  $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ , so verschwindet 2. Term und es gilt:

$$\dot{\vec{L}}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i(t) \times F_i^{\text{äu}} = N^{\text{äu}}$$

In aller Regel der Fall, da Kräfte entlang Verbindungslinien wirken.

- Dann Änderung des Gesamtdrehimpulses allein durch äußere Kräfte gegeben.  
Abgeschlossenes System: Gesamtdrehimpuls ist erhaltene Größe

2. Mo.

Kommentare:

- (i) Drehimpuls ist bezüglich Ursprung definiert. Aussage für abgeschlossenes System unabhängig von Wahl des Bezugspunktes, da in Beweis nur Differenzen auftreten.
- (ii) Ursprungswechsel: Statt  $O$  nun  $Q$  mit  $\vec{r}_0$  bezüglich  $O$

$$\vec{L}^Q = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times p_i = \sum \vec{r}_i \times p_i - \sum \vec{r}_0 \times p_i = \vec{L} - \vec{r}_0 \times \vec{P}$$

und

$$\vec{N}^Q = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times F_i^a = \vec{N} - \sum \vec{r}_0 \times F_i^a$$

Ergibt wiederum

$$\dot{\vec{L}}^Q = \vec{N}^Q$$

Für  $\sum F_i^a = 0$ , erst recht für abgeschlossene Systeme gilt:

Drehimpuls ist in Bezug auf beliebiges Zentrum erhaltene Größe

- (iii) Schwerpunkts- und Relativzerlegung

Sei  $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{x}_i$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum m_i r_i \times \dot{r}_i = \sum m_i (R + x_i) \times (\dot{R} + \dot{x}_i) \\ &= R \times P + \sum m_i x_i \times \dot{R} + R \times \sum m_i \dot{x}_i + \sum m_i x_i \times \dot{x}_i \end{aligned}$$

Da  $\sum m_i \dot{x}_i = 0$

$$L = L_S + L_{rel} = R \times P + \sum m_i x_i \times \dot{x}_i$$

Analog für Drehmoment:

$$N = \sum r_i \times F_i^a = \sum (R + x_i) \times F_i^a = \sum R \times F_i^a + \sum x_i \times F_i^a = N_S + N_{rel}$$

$$\dot{L}_S = \dot{R} \times P + R \times \dot{P} = M \dot{R} \times \dot{R} + R \times \dot{P} = R \times \dot{P} = \sum R \times F_i^a = N_S$$

Wegen  $\dot{L} = N$ , auch  $\dot{L}_{rel} = N_{rel}$

Merke:

Abgeschlossenes System:  $L$ ,  $L_{rel}$  und  $L_S$  sind erhalten

(iv) Betrachte Zwei Körper-Problem:

$$L_{rel} = m_1 \vec{x}_1 \times \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \vec{x}_2 \times \dot{\vec{x}}_2$$

Wegen

$$\vec{x}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{r}, \quad \vec{x}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{r}, \quad M = m_1 + m_2, \quad \vec{r} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$$

folgt:

$$L_{rel} = \left( \frac{m_1 m_2^2}{M^2} + \frac{m_1^2 m_2}{M^2} \right) r \times \dot{r} = \mu r \times \dot{r}, \quad \text{erinnere } \mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

wie erwartet:  $L_{rel}$  eines Teilchens mit Masse  $\mu$ .

## 2.2 Zwei-Körper-Problem

Motiviert aus Kepler-Problem, i.e. Sonne-Erde System mit Gravitationskraft  $\propto 1/r^2$  (wie sich herausstellte)

- Tycho Brahe \*1546, †1601  
Umfangreiche Beobachtungsstudien der Planetenbahnen
- Kepler \*1571, †1630 (Assistent von Tycho Brahe, soll ihn vergiftet haben)  
Ableitung von Beobachtungs-Regeln:
  - Planeten bewegen sich auf Ellipsen.
  - Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen
  - $T^2/R^3 = const$ ,  $T$  Umlaufzeit,  $R$  große Halbachse
- Newton erlaubt Herleitung/Verständnis der Keplerschen Gesetze

Analogie Atomphysik/Quantenmechanik

- Experimente
- Balmer, Lyman ... -Serie, Rydbergformel

$$\nu = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad m = 1, \dots, \quad n = m + 1, m + 2, \dots$$

- Balmer fand  $m = 2$
- Rydberg stellte allgemeine Formel auf
- Lyman fand dann  $m = 1$
- Paschen, Brackett, Pfund folgten
- Quantenmechanik, Schrödinger, Heisenberg

Betrachte abgeschlossenes Zwei-Körper-System mit rotationssymmetrischem Zentralkraftfeld

Was bisher geschah (für die Relativbewegung):

- Bewegungsgleichung:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

- Energie

$$E_{rel} = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + U(r)$$

- Drehimpuls:

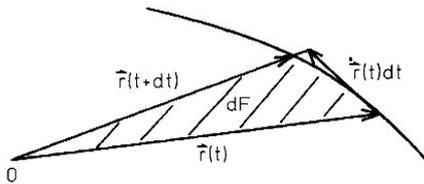
$$\vec{L}_{rel} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

Abgeschlossen:

$$\vec{L}_{rel} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{const}$$

Folgerungen:

- $\vec{L}_{rel}$  ist zeitlich konstant. Lege  $\vec{L}_{rel}$  in  $z$ -Richtung  
Folge:  $\vec{r}$  und  $\dot{\vec{r}}$  liegen in  $xy$ -Ebene
- Betrachte Fläche  $dF$ , die  $r$  in Zeitintervall  $dt$  überstreicht



$$dF = \frac{1}{2} |r \times \dot{r}| dt = \frac{1}{2} |r| |\dot{r}| dt \sin(r, \dot{r} dt)$$

Damit:

$$dF = \frac{1}{2\mu} |L_{rel}| dt$$

- Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
- 2. Kepler Gesetz ist Folge der Drehimpulserhaltung
- Gilt für alle Zentralkraftfelder, z.B. auch für harmonische Kraft  $\vec{F}(\vec{r}) = -D\vec{r}$

Berechnung der Bahnkurve

- Polarkoordinaten in  $xy$ -Ebene

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (1)$$

- Mit  $\vec{L}_{rel} = (0, 0, l)$

$$\begin{aligned}
 l &= \mu(x\dot{y} - y\dot{x}) \\
 &= \mu r \cos \varphi (\dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi) \\
 &\quad - \mu r \sin \varphi (\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi) \\
 &= \mu r^2 \dot{\varphi}
 \end{aligned}$$

also:

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}$$

- Mit Gl. (1) folgt für kinetische Energie der Relativbewegung:

$$\frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad \text{Unterschied } \dot{\vec{r}}, r \text{ klarmachen}$$

- Für Gesamtenergie  $E = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + U(r)$

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

mit

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

$\frac{l^2}{2\mu r^2}$  in  $U_{eff}$  heißt Zentrifugalterm oder Zentrifugalbarriere.

- Wir haben nun eindimensionales Problem, siehe Ende Kapitel 1.3, und erhalten Erstes Integral:

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= \pm \sqrt{2/\mu(E - U_{eff}(r))} \\
 \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{2/\mu(E - U_{eff}(r'))}} &= \int_{t_0}^t dt' = t - t_0
 \end{aligned}$$

Ergibt:

$$r(t) = r(t; E, l^2, r_0)$$

$\varphi(t)$  aus

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{l}{\mu r^2(t)}$$

$$\varphi(t) - \varphi_0 = \int_{t_0}^t dt' \frac{l}{\mu r^2(t')}$$

Beachte:

- Wegen  $\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2(t)}$  kann  $\dot{\varphi}$  Vorzeichen nicht wechseln, i.e Drehung immer in die selbe Richtung
- Mit  $(z(0) = \dot{z}(0) = 0, r_0, \varphi_0, E, l)$  hat das Problem die erforderlichen 6 Anfangsbedingungen  
 $\dot{r}(0), \dot{\varphi}(0)$  aus

$$l = \mu r_0^2 \dot{\varphi}(0), \quad E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}(0)^2 + U_{eff}(r_0)$$

Bahn  $r(\varphi)$

$$\dot{r}(\varphi) = \frac{dr(\varphi)}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{\pm \sqrt{2/\mu(E - U_{eff}(r))}}{l/\mu r^2} = \pm \frac{\sqrt{2\mu}}{l} r^2 \sqrt{E - U_{eff}(r)}$$

Damit

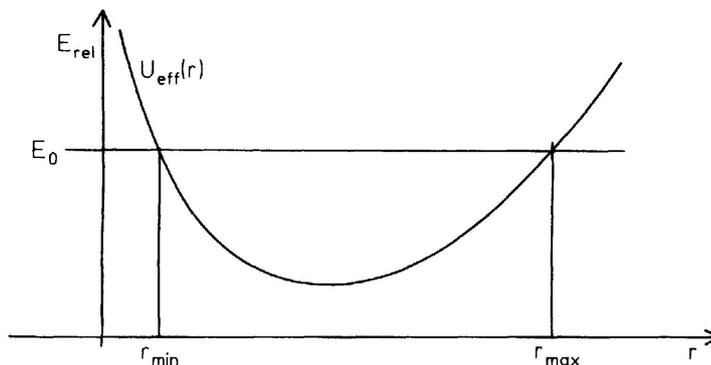
$$\varphi - \varphi_0 = \pm \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^r dr' \frac{1}{r'^2 \sqrt{E - U_{eff}(r')}} \quad (2)$$

### Qualitative Diskussion

$$E = T + U \geq U, \quad E = U, \text{ wenn } v = 0$$

Annahme:  $l \neq 0$

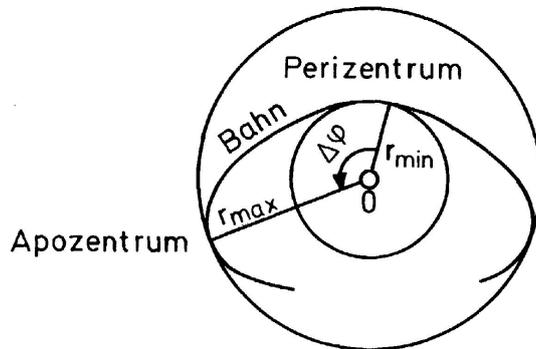
- $U_{eff}$  sei von der Form



Eine mögliche Form von  $U_{eff}(r)$ , für die der Abstand  $r$  bei gegebener Energie  $E_0$  zwischen  $r_{min}$  und  $r_{max}$  liegen muß

Bei  $r_{min}$  und  $r_{max}$  gilt  $\dot{r} = 0$ , aber nicht  $\dot{\varphi} = 0$ , da  $l \neq 0$   
 Bewegung

- beschränkt auf Kreisring  $r_{min} \leq r \leq r_{max}$
- $\dot{\varphi} \neq 0$ . Folge:  $\varphi$  wächst monoton
- $r$  oszilliert zwischen  $r_{min}$  und  $r_{max}$



### Typische Bahn für das effektive Potential

- $r_{min}$ : Perizentrum (bei Sonne Perihel, bei Erde Perigäum)
- $r_{max}$ : Apozentrum (bei Sonne Aphel, bei Erde Apogäum)

Wichtig: Die Bahn ist nicht notwendig geschlossen

Winkel  $\Delta\varphi$  von Perizentrum zum nächsten Apozentrum ist mit Gl. (2)

$$\Delta\varphi = \pm \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr' \frac{1}{r'^2 \sqrt{E - U_{eff}(r')}}$$

Damit Winkel zwischen zwei Perizentren  $2\Delta\varphi$

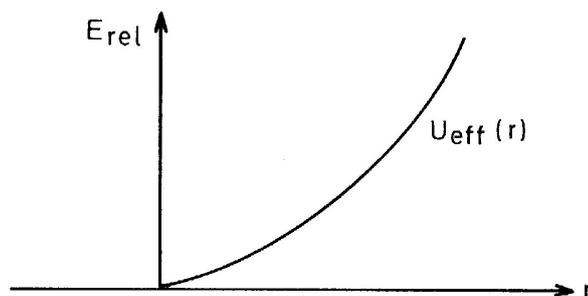
Bahn nur geschlossen, wenn  $n\Delta\varphi = m\pi$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$

2. Mi.

- Es gibt  $E = E_{min}$ , so dass  $r = \text{const} = r_0$   
Bahn ist Kreis, der gleichförmig durchlaufen wird mit

$$\varphi(t) = \frac{l}{\mu r_0^2} t + \varphi_0$$

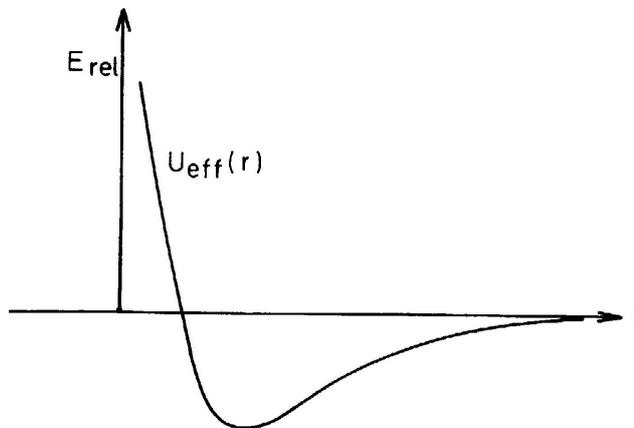
- Für  $l = 0$  verschwindet Zentrifugalbarriere, auch  $r = 0$  wird möglich



Ist der Drehimpuls  $l=0$ , so gibt es keine Zentrifugalbarriere. Auch  $r=0$  ist möglich

$l = 0 \implies \vec{r} \parallel \dot{\vec{r}}$  und  $\dot{\varphi} = 0$  Bewegung zentral

- Gilt  $U(r) \rightarrow U_0$  für  $r \rightarrow \infty$ , addiere Konstante, so dass  $U(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$



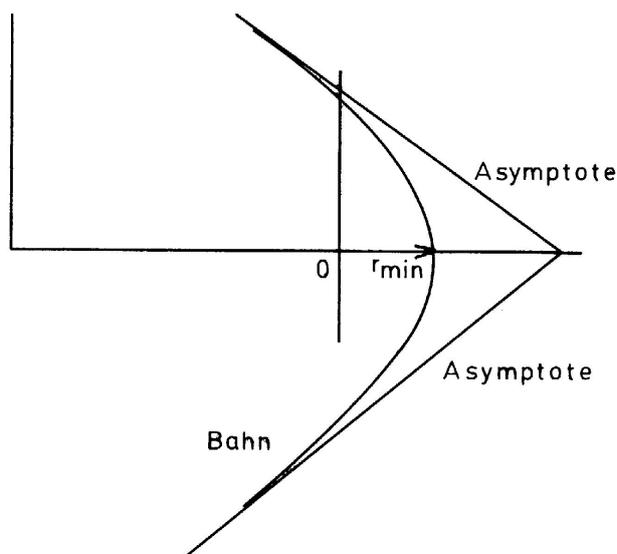
Graph von  $U_{\text{eff}}(r)$  (mit  $l \neq 0$ ) für den Fall, daß das effektive Potential für  $r \rightarrow \infty$  endlich bleibt

- Zwei interessante Fälle

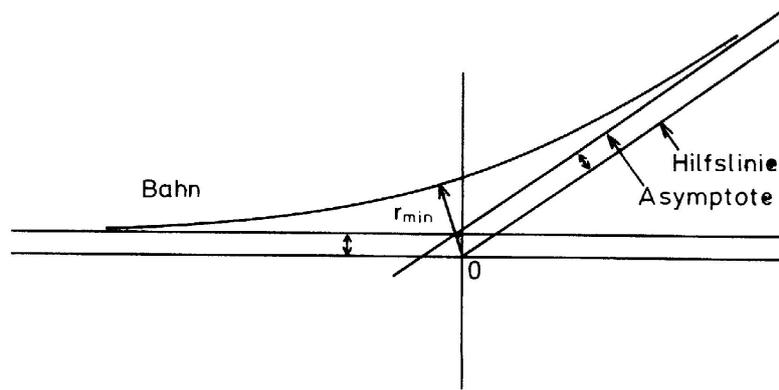
$E < 0$  Bahnen beschränkt, alles wie bisher

$E > 0$

- $r_{\text{max}} = \infty$
- Perizentrum  $r_{\text{min}}$  existiert noch
- Unterscheide anziehendes und abstossendes Potential



Bahn für ein anziehendes Potential für den Fall  $E_0 \geq 0$



**Bahn für ein abstoßendes Potential für den Fall  $E_0 \geq 0$**

Für  $r \rightarrow \infty$  gilt

\*  $\dot{\varphi} \rightarrow 0$  Integral:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^r dr' \frac{1}{r'^2 \sqrt{E - U_{eff}(r')}}$$

gegen endlichen Grenzwert

\* Winkel zwischen Perizentrum und Asymptote:

$$\Delta\varphi = \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{min}}^{\infty} dr' \frac{1}{r'^2 \sqrt{E - U_{eff}(r')}}$$

\* Ferner

$$|\dot{r}| = \sqrt{2/\mu(E - U_{eff}(r))} \rightarrow \sqrt{2/\mu E} = v_{\infty}$$

\* Da  $\dot{\varphi} \rightarrow 0$ , kein Zentrifugalterm mehr:

$$E = T = \frac{1}{2}\mu v_{\infty}^2$$

\* Kommt im Detail in Kapitel 3.2 Streuung

Lessons learnt:

- In abgeschlossenen Mehr-Körper-Systemen gilt
  - Aufspaltung: Schwerpunkts- und Relativbewegungsgleichung
  - Aufspaltung: Schwerpunkts- und Relativenergie
  - Gesamtdrehimpuls ist erhaltene Größe, unabhängig vom Bezugspunkt
  - Aufspaltung Schwerpunkts- und Relativdrehimpuls/drehmoment
  - Schwerpunkt- und Relativanteil Drehimpuls einzeln erhalten
- Zwei-Körper-Problem
  - 2. Keplersche Gesetz folgt aus Drehimpulserhaltung
  - Drehimpuls führt zu effektivem Potential mit Zentrifugalbarriere
  - Im allgemeinen sind die Bahnen des Zwei-Körper-Problems nicht geschlossen

### 3 3. Woche: Newtonsche Mechanik: Kepler-Problem & Streuung

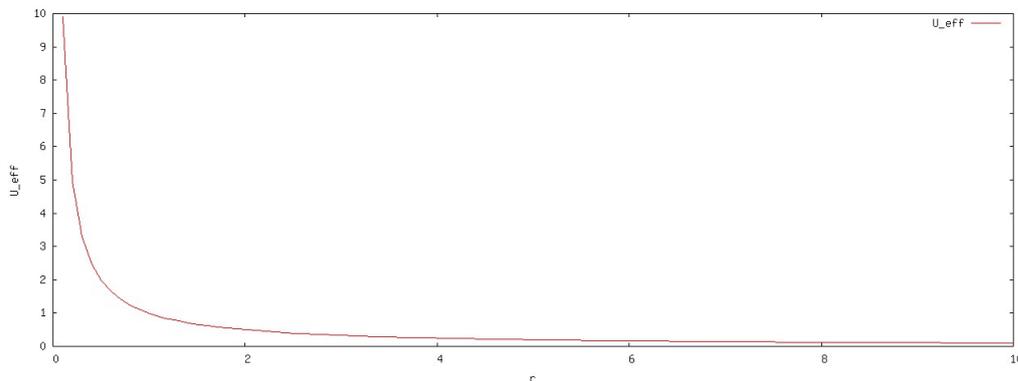
#### 3.1 Kepler Problem

Kepler-Problem: Bestimmung von Bahnen für Zwei-Körper-Problem mit Potential

$$U(r) = -\frac{\kappa}{r}$$

Für  $\kappa = \gamma m_1 m_2$ : Gravitationspotential.

$$U_{eff}(r) = -\frac{\kappa}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$



Minimalwert von  $U_{eff}(r)$ :

$$\frac{d}{dr}U_{eff}(r) = \frac{\kappa}{r^2} - 2\frac{l^2}{2\mu r^3} = 0$$

$$r_{minimum} = \frac{l^2}{\mu\kappa}$$

$$U_{eff,min} = -\frac{\kappa}{\frac{l^2}{\mu\kappa}} + \frac{l^2}{2\mu\left(\frac{l^2}{\mu\kappa}\right)^2} = -\frac{\mu\kappa^2}{l^2} + \frac{\mu\kappa^2}{2l^2} = -\frac{\mu\kappa^2}{2l^2}$$

Initiale Lösung durch Newton

Herleitung der Keplerschen Gesetze aus dem postulierten Gravitationsgesetz

- 1. Kepler Gesetz
- Mit Gl. (2)

$$\varphi = \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_r dr' \frac{1}{r'^2 \sqrt{E + \kappa/r' - l^2/2\mu r'^2}}$$

- Variablensubstitution:

$$r' = 1/s, \quad s = 1/r' \quad ds/dr' = -1/r'^2 \quad - dr'/r'^2 = ds$$

$$\varphi = - \int_{1/r} ds \frac{1}{\sqrt{2\mu E/l^2 + 2\mu\kappa s/l^2 - s^2}}$$

Analytisch lösbar (B-integrable):

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{c + 2bx - x^2}} = -\text{arc cos} \frac{x - b}{\sqrt{b^2 + c}}$$

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \text{arc cos} \frac{1/r - \mu\kappa/l^2}{\sqrt{\mu^2\kappa^2/l^4 + 2\mu E/l^2}} \\ &= \text{arc cos} \frac{(l^2/\mu\kappa)(1/r) - 1}{\sqrt{1 + (2l^2 E/\mu\kappa^2)}} \end{aligned}$$

Das ist  $\varphi(r)$  für das Kepler-Problem

- Zur Vereinfachung führe ein:

$$\begin{aligned} p &= l^2/\mu\kappa && r_{\text{minimum}} \\ \epsilon &= \sqrt{1 + 2l^2 E/\mu\kappa^2} && \text{Exzentrizität} \end{aligned} \quad (3)$$

Folgt

$$\varphi - \varphi_0 = \text{arc cos} \left( \frac{p/r - 1}{\epsilon} \right)$$

oder

$$\epsilon \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{p}{r} - 1$$

oder mit  $\varphi_0 = 0$

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

Polargleichung für Kegelschnitt, Frage: Ist das bekannt? If not, Übung

- $\epsilon < 1$ , d.h.  $E < 0$ : Ellipse
- $\epsilon = 1$ , d.h.  $E = 0$ : Parabel
- $\epsilon > 1$ , d.h.  $E > 0$ : Hyperbel

- Für  $E < 0$  wie vom Zwei-Körper-Problem erwartet eine gebundene Bewegung, hier für  $U(r) \propto 1/r$  aber geschlossene Bahnkurve.

Fallunterscheidungen

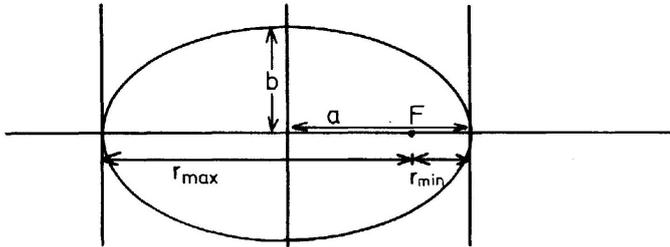
(i)  $\epsilon < 1$ ,  $E < 0$ , gebundene Bewegung

$r$  oszilliert zwischen

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \epsilon}, \quad \varphi = 0$$

und

$$r_{max} = \frac{p}{1 - \epsilon}, \quad \varphi = \pi$$



**Bahn eines Teilchens im Kepler-Problem für  $E < 0$ . Die Bahn ist eine Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$**

Große Halbachse:

$$2a = r_{min} + r_{max} = \frac{p}{1 + \epsilon} + \frac{p}{1 - \epsilon} = \frac{2p}{1 - \epsilon^2}$$

Ergo:

$$a = \frac{p}{1 - \epsilon^2} = l^2 / \mu \kappa \left( -\frac{\mu \kappa^2}{2l^2 E} \right) = \frac{\kappa}{2|E|}$$

Kleine Halbachse:

Wegen:

$$\epsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

$$b^2 = a^2(1 - \epsilon^2) = \frac{\kappa^2}{4E^2} \left( -\frac{2l^2 E}{\mu \kappa^2} \right) = \frac{l^2}{2|E|\mu} = p a \quad (4)$$

Insgesamt:

- Das 1. Keplersche Gesetz: Planeten beschreiben Ellipsenbahn, in einem Brennpunkt steht die Sonne.
- Große und kleine Hauptachse hängen von Energie und Drehimpuls ab
- These der geschlossenen Bahnen macht Newtonsche Theorie zu einer guten, da dies einerseits eine Nullmenge in der Menge aller Möglichen ist, andererseits gut empirisch testbar.

Exentritäten der Planeten:

- Merkur  $\epsilon = 0.206$ , aber schwer zu sehen
- Erde  $\epsilon = 0.017$
- Mars  $\epsilon = 0.093$ , an ihm entdeckt

3. Kepler Gesetz:

$$dF = \frac{1}{2\mu} |L| dt$$

Fläche pro Periode: Ellipse mit

$$F = \pi ab = \frac{1}{2\mu} l T$$

Mit Gl. (3, 4)

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi\mu}{l} ab = \frac{2\pi\mu}{l} a \sqrt{pa} \\ &= \frac{2\pi\mu}{l} a^{3/2} \frac{l}{\sqrt{\mu\kappa}} = 2\pi \sqrt{\mu/\kappa} a^{3/2} \end{aligned}$$

Für Gravitation:

$$T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{\gamma m_1 m_2} a^3 = \frac{4\pi^2}{\gamma(m_1 + m_2)} a^3$$

Sonnenmasse, say,  $m_1 \ll$  Planetenmasse, say,  $m_2$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma m_1} a^3$$

q.e.d

Von Kepler III zu Gravitationsgesetz:

- Kepler III umformuliert:

$$r^3/T^2 = const, \quad \omega = 2\pi/T, \quad r^3\omega^2 = const, \quad r\omega^2 = const \ 1/r^2$$

- Nehme Kreisbahn an

Aus

$$\vec{r}(t) = r e_1 \cos \omega t + r e_2 \sin \omega t$$

folgt

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

- Zusammen:

$$F = m \ddot{\vec{r}}(t) \propto -\omega^2 \vec{r}(t) \propto 1/r^2$$

3. Mo.

(ii)  $\epsilon = 1$ ,  $E = 0$ , Streuung

Parabel, interessanter Grenzfall

(iii)  $\epsilon > 1$ ,  $E > 0$ , Streuung

Hyperbeln

- Einschränkung der Winkel

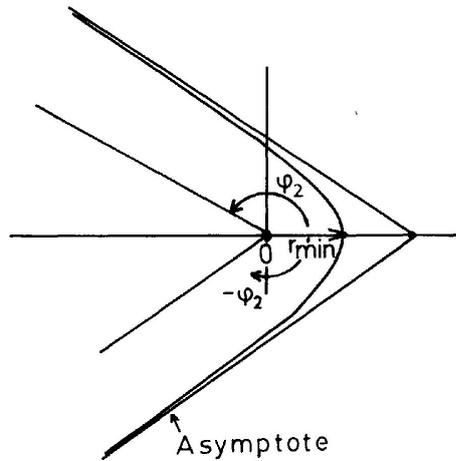
- $r = p/(1 + \epsilon \cos \varphi) > 0$  immer positiv
- $(1 + \epsilon \cos \varphi)$  kann positiv und negativ sein

$$p = \frac{l^2}{\mu\kappa} \quad \text{positiv oder negativ, je nach Vorzeichen von } \kappa$$

Schränkt mögliche Winkel  $\varphi$  ein

- $\kappa > 0$ , anziehende Kraft

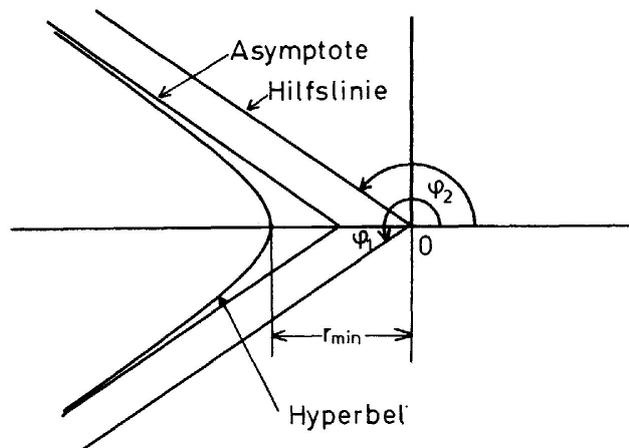
- Perizentrum:  $r = r_{min} = p/(1 + \epsilon)$ ,  $\varphi = 0$
- Asymptote:  $1 + \epsilon \cos \varphi_2 = 0$ ,  $|\varphi_2| > \pi/2$



**Bahn eines Teilchens im Kepler-Problem (anziehendes Potential) für  $E > 0$**

- $\kappa < 0$ , abstoßende Kraft

- $1 + \epsilon \cos \varphi < 0$ ,



**Bahn eines Teilchens im Kepler-Problem (abstoßendes Potential) für  $E > 0$**

- Streuung, siehe nächstes Unterkapitel

## Lenz-Runge Vektor

- Beim Potential

$$U(r) = -\kappa/r$$

sind Bahnen geschlossen.

- Legt weitere Erhaltungsgröße nahe, z.B. Vektor vom Zentrum zum Perizentrum
- Betrachte Bewegungsgleichung, Drehimpuls

$$\mu\ddot{\vec{r}} + \kappa\frac{\vec{r}}{r^3} = 0, \quad \vec{L} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

- Zur Vereinfachung

$$\beta = \frac{\kappa}{\mu}, \quad \vec{C} = \frac{\vec{L}}{\mu}$$

- Ergibt:

$$\ddot{\vec{r}} + \beta\frac{\vec{r}}{r^3} = 0, \quad \vec{C} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

- Vektorielle Multiplikation der Bewegungsgleichung mit  $\vec{C}$

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{\vec{r}} \times \vec{C} + \beta\frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{C} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{C}) + \frac{\beta}{r^3}\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \\ &= \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{C}) + \frac{\beta}{r^3}[\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - r^2\dot{\vec{r}}] \\ &= \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{C} - \beta\frac{\vec{r}}{r}\right), \end{aligned}$$

da

$$\frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \vec{r}\frac{\dot{r}}{r^3}, \quad \left(\frac{\dot{u}}{v}\right) = \frac{uv - u\dot{v}}{v^2}$$

denn aus  $\dot{r}^2 = r^2$  folgt:  $\vec{r}\dot{\vec{r}} = r\dot{r}$ , zu Hause ausrechnen

- Ergo:

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{C} - \beta\frac{\vec{r}}{r}$$

ist zeitlich konstant.

- Da  $\vec{A}$  konstant, kann  $\vec{A}$  auch im Perizentrum bestimmt werden.
- Dort liegen  $\dot{\vec{r}} \times \vec{C}$  und  $\frac{\vec{r}}{r}$  in Richtung des Perizentrums.
- Also zeigt  $\vec{A}$  immer in Richtung Perizentrum.
- Konstanz des Lenz-Runge Vektors ist nur für  $1/r$  Potential gegeben.

Beobachtete Periheldrehung des Merkur: 573 Bogensekunden pro Jahrhundert

- 530 ″: Einfluß der anderen Planeten
- 43 ″: Effekte der Allgemeinen Relativitätstheorie

ART:  $1/r$  Potential ist nur eine Näherung,  $1/r^2$ -Beitrag reicht für Periheldrehung

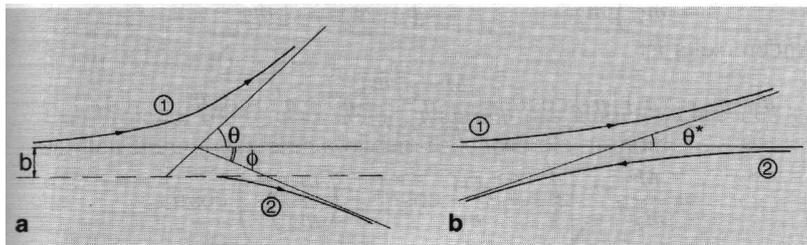
Leseempfehlung:

D.L. Goodstein, J.G. Goodstein: Feynmans verschollene Vorlesung  
Die Bewegung der Planeten um die Sonne. Piper, 2002

## 3.2 Streuung

subsubsectionSchwerpunkt- und Laborsystem

- In der Regel ruht ein Teilchen (Target) Laborsystem
- Aber Rechnungen im Schwerpunktsystem einfacher



(a) Das Projektil 1 kommt aus dem Unendlichen und streut an dem ursprünglich ruhenden Target 2, das hierdurch in Bewegung gesetzt wird.  
(b) Derselbe Streuprozess im Schwerpunktsystem der Teilchen 1 und 2 angeschaut. Die Unterscheidung Projektil und Target verschwindet

- Stoßparameter  $b$

Legt Drehimpuls fest  $\vec{L} = \vec{b} \times \vec{p}(t = -\infty) = bp$

Annahme: Elastischer Stoss, innerer Zustand ändert sich nicht

Nomenklatur:

- Laborsystem:  $p_{Li}$  vor,  $p'_{Li}$  nach dem Stoss
- Schwerpunktsystem:  $p_{S1} = -p_{S2} = p_S$  vor,  $p'_{S1} = -p'_{S2} = p'_S$  nach dem Stoss
- Impuls des Schwerpunkts:  $P$

Energieerhaltung

$$\frac{p_{L1}^2}{2m_1} = \frac{p'_{L1}{}^2}{2m_1} + \frac{p'_{L2}{}^2}{2m_2}$$

Impulserhaltung:

$$p_{L1} = p'_{L1} + p'_{L2}$$

Zerlegung in Schwerpunkts- und Relativbewegung:

- Vor dem Stoss:

$$p_{L1} = \frac{m_1}{M}P + p_S \quad M = m_1 + m_2$$

$$p_{L2} = \frac{m_2}{M}P - p_S = 0$$

also:

$$P = \frac{M}{m_2}p_S \quad p_{L1} = P$$

- Nach dem Stoss

$$p'_{L1} = \frac{m_1}{M}P + p'_{S1} = \frac{m_1}{m_2}p_S + p'_S$$

$$p'_{L2} = \frac{m_2}{M}P - p'_{S1} = p_S - p'_S$$

- Erhaltung der kinetischen Energie der Relativbewegung:

$$|p_S| = |p'_S| =: p_S^*$$

- Seien  $\Theta_L$  und  $\Theta_S$  die Streuwinkel
- Mit  $p'_{L1} = \frac{m_1}{m_2}p_S + p'_S$  und  $p_{L1} = \frac{M}{m_2}p_S$
- Einerseits

$$p_{L1}p'_{L1} = \frac{M}{m_2} \left( \frac{m_1}{m_2}p_S^2 + p_S p'_S \right) = \frac{M}{m_2} p_S^2 \left( \frac{m_1}{m_2} + \cos \theta_S \right)$$

Andererseits:

$$p_{L1}p'_{L1} = |p_{L1}| |p'_{L1}| \cos \theta_L = \frac{M}{m_2} p_S^* \left| \frac{m_1}{m_2} p_S + p'_S \right| \cos \theta_L$$

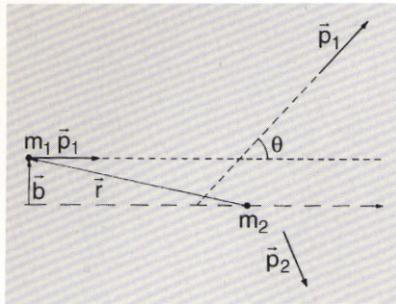
$$= \frac{M}{m_2} p_S^{*2} \sqrt{1 + 2 \frac{m_1}{m_2} \cos \theta_S + \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^2} \cos \theta_L$$

- Damit:

$$\cos \theta_L = \left( \frac{m_1}{m_2} + \cos \theta_S \right) / \sqrt{1 + 2 \frac{m_1}{m_2} \cos \theta_S + \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^2}$$

- Aufgelöst:

$$\tan \theta_L = \frac{\sin \theta_S}{m_1/m_2 + \cos \theta_S}$$



Kinematik eines Streuprozesses mit zwei Teilchen, im Laborsystem betrachtet. Das Teilchen mit Masse  $m_2$  ruht vor dem Stoß

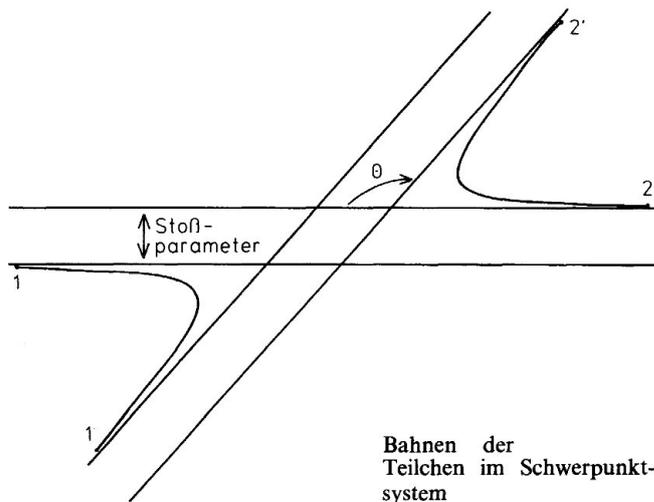
- Man kann leicht zeigen:

$$\Phi_S = \frac{\pi - \theta_S}{2}$$

- Spezialfälle:

- Projektilmasse  $m_1 \ll$  Targetmasse  $m_2$ , dann  $\theta_S \approx \theta_L$
- $m_1 = m_2$ :  $\theta_L = \theta_S/2$ ,  $\theta_L + \Phi = \pi/2$

### 3.2.1 Rutherford-Streuung



Bahnen der Teilchen im Schwerpunktsystem

Kepler-Problem der Streuung

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

Vom Kepler-Problem: Im Schwerpunktsystem<sup>1</sup>: Hyperbeln mit

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

mit

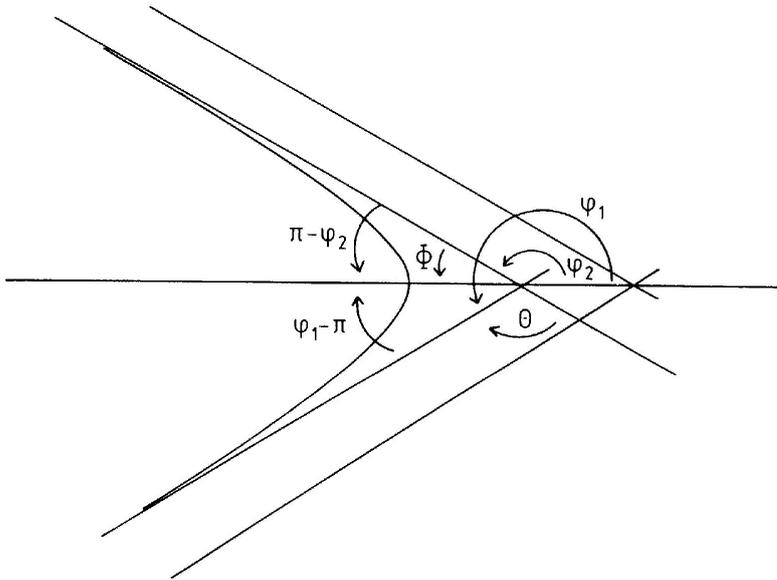
$$p = l^2 / \mu \kappa$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + 2l^2 E / \mu \kappa^2}$$

<sup>1</sup>Für Umrechnung in Labor-System, siehe vorherigen Abschnitt

mit

$$1 + \epsilon \cos \varphi_i = 0$$



Der Streuwinkel  $\theta$  ist durch die Ablenkung der Relativgeschwindigkeit bestimmt. Es ist  $\Phi = \pi - \varphi_2 = \varphi_1 - \pi$  und  $2\Phi + \theta = \pi$

Es gilt

$$\pi - \varphi_2 = \varphi_1 - \pi = \Phi$$

Weiterhin

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \pi - \theta, & \text{also mit} \\ \varphi_1 - \pi &= \pi - \varphi_2 & \text{auch} \\ \pi - \varphi_2 &= \varphi_2 - \theta & \text{oder} \\ \varphi_2 &= \frac{\pi + \theta}{2} \end{aligned}$$

Damit:

$$-\frac{1}{\epsilon} = \cos \varphi_2 = \cos \left( \frac{\pi + \theta}{2} \right) = -\sin \theta/2$$

$$\sin \theta/2 = \frac{1}{\sqrt{1 + 2l^2 E / \mu \kappa^2}}$$

Mit Identität

$$\sin \theta/2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta/2}}$$

$$\cot^2 \theta/2 = 2l^2 E / \mu \kappa^2$$

Mit

$$v_\infty = |\dot{\vec{r}}(t = -\infty)| = |\dot{\vec{r}}(t = \infty)|, \quad l = \mu b |v_\infty|, \quad E = \frac{1}{2} \mu v_\infty^2, \quad \tan \theta/2 = \sqrt{\frac{1}{\cot^2 \theta/2}}$$

Abhängigkeit des Streuwinkels  $\theta$  von Stossparameter  $b$

$$\tan \theta/2 = \frac{|\kappa|}{\mu v_{\infty}^2 b}$$

Bemerkung:

- Je kleiner  $b$ , desto größer  $\theta$ ,  $b \rightarrow 0$  folgt  $\theta \rightarrow \pi$ . Drehimpuls verschwindet.
- Zentraler Stoss mit  $r_{min}$

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + U(r)$$

Vor dem Stoss:  $E = \frac{1}{2}\mu v_{\infty}^2$

Am Umkehrpunkt:  $E = U(r_{min}) = -\kappa/r_{min}$

- Ergo

$$r_{min} = \frac{2|\kappa|}{\mu v_{\infty}^2}$$

Gelangt  $r_{min}$  in Bereich der Radien der Ladungsträger, so wird es Abweichungen von Streuformel geben, da nicht mehr als Punktteilchen behandelbar.

Anwendung:

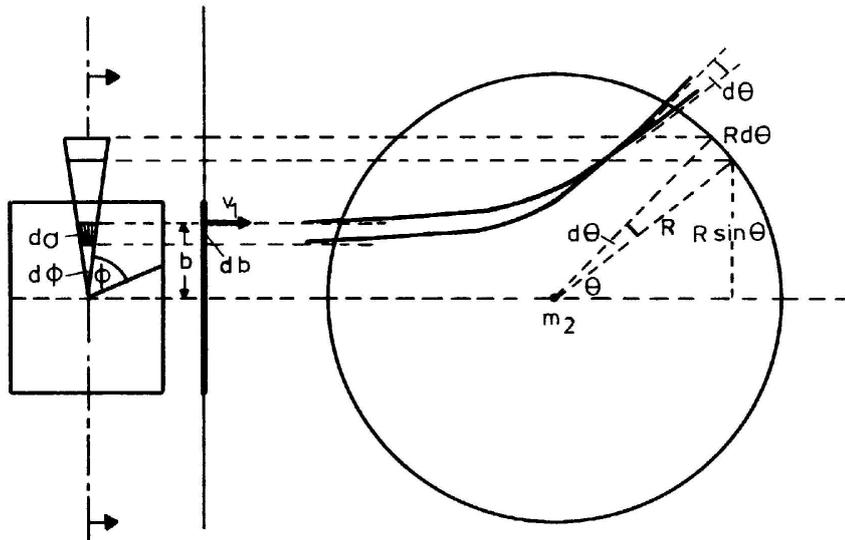
- Teilchen 1  $\alpha$ -Teilchen mit  $v = 1.6110^9$  cm/s
- Teilchen 2 Kupferkern
- $r_{min} = 1.5510^{-12}$  cm
- Experimenteller Befund: Streuformel gilt
- Ergo Atomkerne kleiner als  $10^{-12}$  cm
- Widerlegung des Thompsonschen "Rosinenkuchen-Modells"

3. Mi.

### 3.2.2 Streuquerschnitt

Experimentelles Setting:

- Strahl mit bestimmten Durchmesser wird auf Streuzentrum geschossen



**Darstellung der Trajektorien von Teilchen mit benachbartem  $b$  und  $\theta$**

- Durch Messung der Ablenkung in Streuwinkelbereich  $(\theta, \theta + d\theta)$  und Azimutwinkelbereich  $(\varphi, \varphi + d\varphi)$  Rückschluss auf Potential
- Gemessene Größe: Pro Zeiteinheit in Raumwinkelement  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  gestreute Teilchen
- Zentraler experimenteller Zugang in Teilchenphysik
- Lerne aus "lange vor" und "lange nach" dem Streuprozess, was im mikroskopischen passiert.
- Zu jedem  $\theta$  gehört ein  $b$
- Teilchen, die in  $d\Omega$  landen, kommen aus Flächenelement

$$d\sigma = -b db d\varphi, \quad b = b(\theta)$$

$d\sigma$ , resp.  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  heißt differentieller Wirkungs-/streuquerschnitt

Beispiel: Rutherford Streuung

- Coulomb-Potential

$$\tan \theta/2 = \frac{|\kappa|}{\mu v_\infty^2 b}$$

$$b = \frac{|\kappa| \cot \theta/2}{\mu v_\infty^2}$$

- Folglich:

$$db = -\frac{\kappa}{2\mu v_\infty^2} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} d\theta$$

$$\begin{aligned}
d\sigma &= -b db d\varphi \\
&= \left(\frac{\kappa}{\mu v_\infty^2}\right)^2 \frac{1}{2 \sin^2 \theta/2} \frac{\cos \theta/2}{\sin \theta/2} d\theta d\varphi \\
&\quad \text{mit } \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad x = \theta/2, \quad \cos \theta/2 = \frac{\sin \theta}{2 \sin \theta/2} \\
&= \left(\frac{\kappa}{\mu v_\infty^2}\right)^2 \frac{1}{4 \sin^4 \theta/2} \sin \theta d\theta d\varphi \\
&= \left(\frac{\kappa}{2\mu v_\infty^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} d\Omega
\end{aligned}$$

Differentieller Wirkungs-/Streuquerschnitt:

- $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\kappa}{2\mu v_\infty^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2}$$

Totaler Wirkungs-/Streuquerschnitt:

$$\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

Bedeutung: Eingangsfläche, die alle Teilchen durchqueren, die überhaupt gestreut werden.

Hier:

$$\sigma_{tot} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta d\varphi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sim 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} = \infty$$

Interpretation:

- Will man Querschnitt des einfallenden Strahls so gross machen, dass auch Streuwinkel  $\theta = 0$  auftritt, so ist Querschnitt  $\infty$
- Coulomb-Potential ist langreichweitig. Im Gegensatz zu schwacher und starker Kernkraft.

In der Regel: Target viele Teilchen. Wenn

- Target klein gegen Strahldurchmesser
- Teilchen nicht zu dicht gepackt

nur Erhöhung der Intensität

Uebung: Streuquerschnitt von Kugel

Lessons learnt:

- Kepler Gesetze lassen sich durch Newtonsche Mechanik verstehen
- Für Gravitationspotential sind Bahnen des Zwei-Körper-Problems geschlossen.
- Lenz-Runge-Vektor als zusätzliche Erhaltungsgröße
- Streuquerschnitt für  $1/r$ -Potential  $\sim 1/\sin^4(\theta/2)$
- Totaler Streuquerschnitt bei  $1/r$  unendlich wegen Langreichweitigkeit

## 4 4. Woche: Newtonsche Mechanik: Lineare Schwingungen

Linearisierung :

- Allgemeine Kräfte um eine Gleichgewichtslage lassen sich Taylor-entwickeln

$$F(x) = -ax - bx^2 - cx^3 - \dots$$

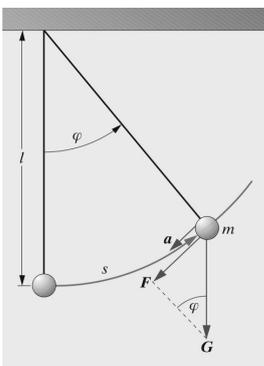
- Entspricht für Potential

$$U(x) = \text{const} + \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{4}cx^4 + \dots$$

- Oft: Abbruch nach linearem Term sinnvoll.
- Ergibt lineare, oder besser linearisierte Bewegungsgleichungen
- Wichtig: Bei linearen Systemen gilt Superpositionsprinzip:  
Mit Lösungen  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  ist auch  $ax_1(t) + bx_2(t)$  Lösung

### 4.1 Eindimensionale Systeme

#### 4.1.1 Harmonischer Oszillator



- $ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi = -mgl \left( \varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 + \dots \right)$

- Linearisierung:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\varphi, \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi$$

Ansatz:

$$\varphi(t) = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t, \quad \text{folgt: } \omega^2 = \frac{g}{l} \quad \omega = \pm \frac{g}{l}$$

- Allgemeine Lösung:

$$\varphi(t) = \operatorname{Re}\{A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}\}$$

DGl 2. Ordnung: Zwei Anfangsbedingungen:  $\varphi(0) = \alpha, \dot{\varphi}(0) = \beta$

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \operatorname{Re}\{A_1 + A_2\} = \alpha \\ \dot{\varphi}(0) &= \operatorname{Re}\{i\omega A_1 - i\omega A_2\} = \beta \end{aligned}$$

Mögliche Lösung:  $A_1 = \alpha, A_2 = i\beta/\omega$

$$\varphi(t) = \alpha \cos \omega t + (\beta/\omega) \sin \omega t = C \cos(\omega t - \delta), \quad C = \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^2}{\omega^2}}, \quad \tan \delta = \frac{\beta}{\alpha\omega}$$

#### 4.1.2 Homogenes gedämpftes lineares System

- Betrachte:

$$\ddot{x}(t) + 2\rho\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad \rho, \omega_0^2 > 0 \quad (5)$$

Harmonischer Oszillator mit Reibungskraft  $-2\rho\dot{x}$

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 \right) \\ &= \dot{x}(\ddot{x} + \omega_0^2 x) = -2\rho\dot{x}^2 \end{aligned}$$

Macht Sinn.

- Zur Lösung Komplexifizierung

- Betrachte Gl. (5) für komplexwertige  $x(t)$
- Es gilt Superpositionsprinzip:  
Mit Lösungen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  ist auch  $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$  Lösung
- Da  $\rho, \omega_0^2 \in \mathbb{R}$  ist auch komplex konjugierte  $x(t)^*$  Lösung
- "Re-Reellisierung":  
 $u(t) = \operatorname{Re}(x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) + x(t)^*)$  ist reelle Lösung.

- Exponentialansatz:

$$x(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

- Bestimme  $\lambda$  so, dass Gl. (5) erfüllt wird.  
Eingesetzt, ergibt:

$$\lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega_0^2 = 0$$

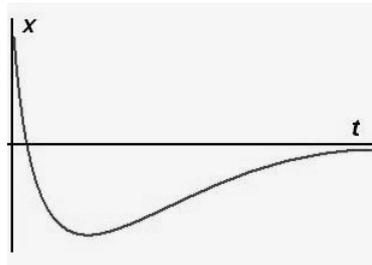
- Ansatz führt zur (allgemeinen) Lösung<sup>2</sup>, wenn  $\lambda$  Nullstelle des Polynoms ist:

$$\lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}$$

- Drei Fälle möglich, jeweils ZEICHNUNG:

- \*  $\rho^2 > \omega_0^2$ : Starke Dämpfung, zwei reelle Nullstellen

$$x(t) = e^{-\rho t}(ae^{\hat{\omega}t} + be^{-\hat{\omega}t}), \quad \hat{\omega} = \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}$$

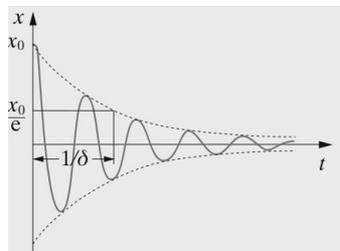


- \*  $\rho^2 < \omega_0^2$ : Schwache Dämpfung, zwei komplex konjugierte Nullstellen  
Allgemeine komplexe Lösung:

$$x(t) = e^{-\rho t}(\alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$$

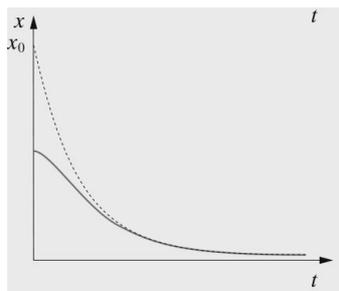
Reell:

$$x(t) = e^{-\rho t}(a' \cos \omega t + b' \sin \omega t)$$



- \*  $\rho^2 = \omega_0^2$ : Aperiodischer Grenzfall  
Exponentialansatz liefert nur eine Lösung.  
Allgemeine Lösung:

$$x(t) = e^{-\rho t}(\alpha + \beta t)$$



4. Mo.

<sup>2</sup>Ansätze müssen nicht zu Lösungen führen. Für "allgemein" siehe aperiodischer Grenzfall. Für überhaupt teste  $x(t) = at^2$

### 4.1.3 Harmonisch getriebenes gedämpftes lineares System

- Betrachte harmonisch getriebenes lineares System:

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \quad (6)$$

eine inhomogene Differentialgleichung

Formal:

$$Lx(t) = f(t), \quad L : \text{linearer Differentialoperator mit } L = \left( \frac{d^2}{dt^2} + 2\rho \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) \quad (7)$$

Linearität erklären

- Satz:

Wenn  $x_a(t)$  Lösung von Gl. (7), so ist jede weitere Lösung  $x_b(t)$  von der Form

$$x_b(t) = x_a(t) + u(t)$$

wobei  $u(t)$  die homogene Gleichung  $Lu = 0$  löst.

- Beweis:

– Für  $x_b(t)$  gilt:

$$x_b(t) = x_a(t) + (x_b(t) - x_a(t)) \text{ und } L(x_b(t) - x_a(t)) = Lx_b(t) - Lx_a(t) = f - f = 0$$

$(x_b(t) - x_a(t))$  löst also homogene Gleichung.

– Umgekehrt ist mit

$$Lu = 0 \text{ und } Lx_a(t) = f$$

auch  $L(x_a(t) + u) = f$ .

– q.e.d.

- Merke: Inhomogenes Problem ist vollständig gelöst, wenn allgemeine Lösung des homogenen Problems und eine einzige Lösung des inhomogenen Problems bekannt ist.

Die Lösung

- Komplexifizierung:

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\omega t}$$

- Exponentialansatz:

$$x(t) = Ae^{i\omega t}, \quad A : \text{komplexe Amplitude}$$

- Eingesetzt:

$$A(-\omega^2 + 2i\rho\omega + \omega_0^2) = f_0, \quad A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\rho\omega}$$

Ergibt eine Lösung des inhomogenen Systems

$$x_a(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\rho\omega} e^{i\omega t}$$

- Allgemeine Lösung durch Addition der allgemeinen Lösung des homogenen Systems, Gl. (5).

Da diese aber stets mit  $t \rightarrow \infty$  abklingen, strebt jede Lösung gegen die spezielle  $x_a(t)$

- System "vergißt" Anfangsbedingungen im Einschwingvorgang
- Schreibe

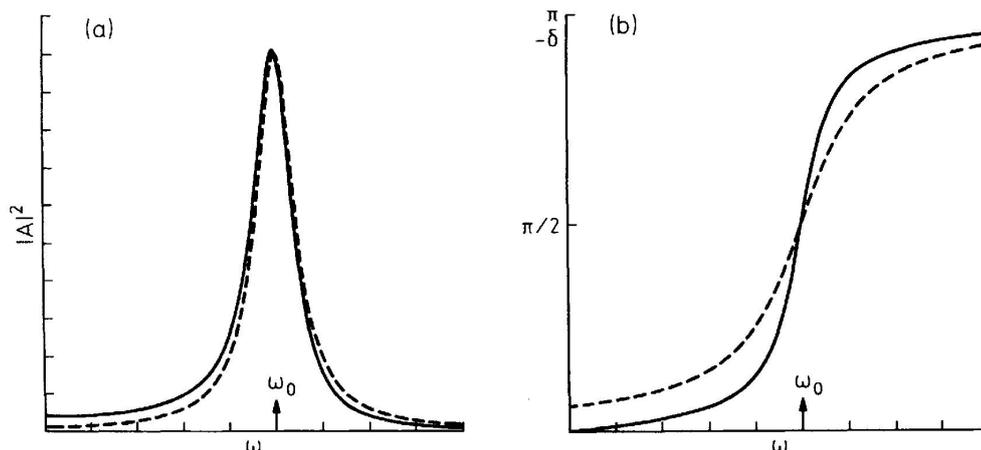
$$A = |A|e^{i\delta}$$

ergibt reelle Lösung von Gl. (6)

$$x(t) = \operatorname{Re}(x_a(t)) = |A| \cos(\omega t + \delta)$$

mit

$$|A|^2 = \frac{f_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\rho^2\omega^2}, \quad \tan \delta = \frac{2\rho\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$



Amplitudenquadrat  $|A|^2$  und Phase  $-\delta$  in Abhängigkeit von  $\omega$ . Die durchgezogene Kurve gilt für das exakte Resultat (6.5.4), die gestrichelte Kurve für die Näherung für schwache Dämpfung (6.5.5)

- Interpretation

–  $|A|^2$  hat Maximum bei  $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\rho^2$

Resonanz

Maximum um so schärfer je kleiner Dämpfung  $\rho$

–  $\delta \in [0, -\pi]$

Erschwungene Schwinung hinkt dem äußeren Antrieb nach.

Für  $\omega \rightarrow 0$  folgt  $\delta \rightarrow 0$ , für  $\omega \rightarrow \infty$  folgt  $\delta \rightarrow -\pi$

Phasensprung schärfer, wenn Dämpfung kleiner

## 4.2 Der allgemeine harmonische Fall

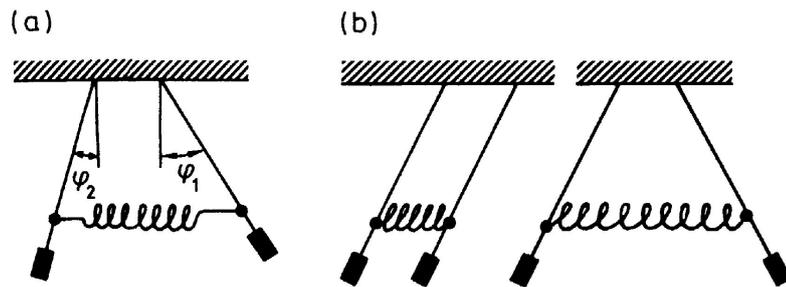
- Allgemeinen Fall jeweils an

$$m\ddot{x} + Dx = 0, \quad E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Dx^2$$

motivieren

- Bewegungsgleichung

$$\sum_j (M_{ij}\ddot{x}_j + K_{ij}x_j) = 0$$



Gekoppelte Pendel (a) und ihre Fundamentalschwingungen (b)

- Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l}\varphi_1 + \frac{D}{m}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}\varphi_2 + \frac{D}{m}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

Matrixformulierung:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{D}{m} & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & \frac{g}{l} + \frac{D}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = 0$$

- Massenmatrix  $M$  mit  $M_{ij} = M_{ji}$ ,

$$\sum_{ij} M_{ij}a_i a_j > 0, \quad \text{für } \sum_i a_i^2 \neq 0, \quad \text{man denke an Geschwindigkeiten}$$

da kinetische Energie  $> 0$ , wenn nicht alle Geschwindigkeiten verschwinden

$M_{ij}$  ist positiv definit

- Kopplungsmatrix  $K$  mit  $K_{ij} = K_{ji}$

$$\sum_{ij} K_{ij} a_i a_j > 0, \quad \text{für } \sum_i a_i^2 \neq 0, \quad \text{man denke an Auslenkungen}$$

gilt, wenn  $x^0$  stabile Ruhelage, i.e. Minimum von Potential ist.

An Badewanne erläutern.

- Ab jetzt alle Indices unterdrückt, i.e.  $M, K \in R^{n \times n}$ ,  $x, y \in R^n$

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \tag{8}$$

- Symmetrie, selbstadjungiert:

$$y \cdot (Mx) = (My) \cdot x, \quad y \cdot (Kx) = (Ky) \cdot x, \quad \cdot : \text{Skalarprodukt} : x \cdot y = \sum x_i y_i$$

Lösung:

- Komplexifizierung

wie gehabt

- Exponentialansatz

Ansatz:

$$x(t) = v e^{i\omega t}, \quad x, v \in C^n$$

Bestimme  $v$  und  $\omega$ , so dass  $x(t)$  Lösung von Gl. (8)

- Eingesetzt, ein Eigenwert-Problem:

$$(K - \omega^2 M)v = 0, \quad M^{-1}K v = \omega^2 v$$

Nichttriviale Lösung  $v \neq 0$ , nur wenn  $(K - \omega^2 M)$  nicht injektiv, also

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad \text{Bedingungsgleichung für } \omega$$

- Säkulargleichung: Taucht auf für Langzeit- ("säkular") Verhalten der Planeten bei Störungen durch die anderen auf, siehe Kapitel 12.4.
- $n$ -ter Ordnung in  $\omega^2$
- Mögliche Werte von  $\omega$  müssen Nullstellen von  $\det(K - \omega^2 M) = 0$  sein

$$(K - \omega_\alpha^2 M)v_\alpha = 0 \quad \text{Bedingungsgleichung für } v_\alpha$$

Seien  $\omega_\alpha^2$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$  die Nullstellen und  $v_\alpha$  die entsprechenden Eigenvektoren mit

$$(K - \omega_\alpha^2 M)v_\alpha = 0$$

Es gilt

- (i)  $\omega_\alpha^2$  ist reell
- (ii) Wenn  $x^*Kx \geq 0 \forall x$ , dann  $\omega_\alpha^2 \geq 0$   
 Wenn  $x^*Kx > 0 \forall x \neq 0$ , also  $x_0$  stabiles Minimum, gilt  $\omega_\alpha^2 > 0$   
 $\omega_\alpha$  ist also reell und damit  $x(t) = v_\alpha e^{i\omega_\alpha t}$  beschränkt.
- (iii) Eigenvektoren  $v_\alpha$  können reell gewählt werden.
- (iv) Die reellen Eigenvektoren  $v_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$  sind linear unabhängig und bilden Basis des  $R^n$

Beweis:

- (i) Aus

$$Kv_\alpha = \omega_\alpha^2 Mv_\alpha \quad \text{folgt} \quad v_\alpha^* \cdot Kv_\alpha = \omega_\alpha^2 v_\alpha^* \cdot Mv_\alpha$$

Wegen Symmetrie und Reellwertigkeit von  $M$  und  $K$  sind beide Seiten reell.

$$v^* \cdot Kv = Kv \cdot v^* = v \cdot Kv^* = (v^* \cdot Kv)^*$$

Da  $M$  positiv definit, kann man auflösen:

$$\omega_\alpha^2 = \frac{v_\alpha^* K v_\alpha}{v_\alpha^* M v_\alpha} \quad \omega_\alpha^2 \text{ reell}$$

- (ii) Gilt  $x^*Kx > 0$ , so folgt  $\omega_\alpha^2 > 0$  und beschränkte Lösung

$$x(t) = v_\alpha e^{i\omega_\alpha t}$$

- (iii) Da  $M$ ,  $K$ ,  $\omega_\alpha^2$  reell, folgt aus

$$(K - \omega_\alpha^2 M)v_\alpha = 0$$

$$[(K - \omega_\alpha^2 M)v_\alpha]^* = (K - \omega_\alpha^2 M)v_\alpha^* = 0$$

Also  $Re(v_\alpha)$  und  $Im(v_\alpha)$  Eigenvektoren, die nicht gleichzeitig verschwinden können

- (iv) Für reelle Eigenvektoren  $v_\alpha$ ,  $v_\beta$ :

$$v_\alpha \cdot Kv_\beta = \omega_\beta^2 v_\alpha \cdot Mv_\beta$$

$$v_\alpha \cdot Kv_\beta = Kv_\alpha \cdot v_\beta = \omega_\alpha^2 Mv_\alpha \cdot v_\beta = \omega_\alpha^2 v_\alpha \cdot Mv_\beta$$

Damit:

$$(\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2)v_\alpha Mv_\beta = 0$$

und somit

$$v_\alpha Mv_\beta = 0, \quad \text{für } \omega_\alpha^2 \neq \omega_\beta^2$$

Annahme: Es gelte  $\omega_\alpha^2 \neq \omega_\beta^2$ . Beweis auch ohne wahr, aber aufwendiger

Wähle  $\xi_\alpha$ , so dass

$$\sum_{\alpha=1}^n \xi_\alpha v_\alpha = 0$$

Es folgt

$$\begin{aligned} v_\beta \cdot M \left[ \sum_{\alpha=1}^n \xi_\alpha v_\alpha \right] &= 0 = \sum_{\alpha=1}^n \xi_\alpha v_\beta \cdot M v_\alpha \\ &= \xi_\beta v_\beta \cdot M v_\beta \end{aligned}$$

Also  $\xi_\beta = 0 \forall \beta$

Damit sind  $v_\alpha \alpha = 1, \dots, n$  linear unabhängig.

Bilden Basis, da ihre Anzahl  $=n$

Beweis Ende

4. Mi.

- Normierung  $\vec{v}_\alpha$

$$v_\alpha M v_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (9)$$

- Die Lösungen

$$\vec{x}_\alpha(t) = \vec{v}_\alpha e^{i\omega_\alpha t}$$

heißen Eigenschwingungen,  $\omega_\alpha$  heißen Eigenfrequenzen des Systems

Harmonische Schwingungen mit konstanten Verhältnissen der einzelnen Auslenkungen

- Die allgemeine Lösung :

$$\vec{x}(t) = \sum_{\alpha=1}^n \vec{v}_\alpha (a_\alpha e^{i\omega_\alpha t} + b_\alpha e^{-i\omega_\alpha t})$$

$a_\alpha$  und  $b_\alpha$  durch Anfangsbedingungen gegeben

- Normalkoordinaten

Führe neue Koordinaten  $Q_\alpha(t)$  ein.

$$\vec{x}(t) = \sum_{\alpha=1}^n Q_\alpha(t) \vec{v}_\alpha \quad (10)$$

Damit gilt:

$$Q_\alpha(t) = v_\alpha \cdot M x(t) \quad (11)$$

Aus Bewegungsgleichung

$$M\ddot{x} + Kx = 0$$

folgt für  $v_\alpha, \alpha = 1, \dots, n$  :

$$v_\alpha M \ddot{x} + v_\alpha K x = 0$$

$$\ddot{Q}_\alpha + K v_\alpha x = 0$$

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 M v_\alpha x = 0$$

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 v_\alpha M x = 0$$

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = 0$$

$$\ddot{Q}_\alpha(t) + \omega_\alpha^2 Q_\alpha(t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, n$$

### Bewegungsgleichungen entkoppeln

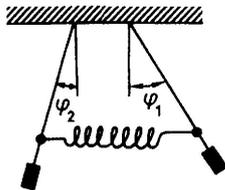
- Existiert  $\alpha$  mit  $\omega_\alpha = 0$ , i.e.  $v_\alpha K v_\alpha = 0$  so folgt

$$\ddot{Q}_\alpha(t) = 0$$

als lineare Bewegung für diese Normalkoordinate

## 4.3 Zwei Beispiele

### 4.3.1 Zwei gekoppelte Pendel für kleine Amplituden



- Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l} \varphi_1 + \frac{D}{m} (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ \ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l} \varphi_2 + \frac{D}{m} (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0 \end{aligned}$$

Matrixformulierung, Massenmatrix  $M$ : Einheitsmatrix

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{D}{m} & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & \frac{g}{l} + \frac{D}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = 0$$

- Exponentialansatz

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

- Ergibt Eigenwertgleichung:

$$\begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{D}{m} - \omega^2 & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & \frac{g}{l} + \frac{D}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = 0$$

- Säkulargleichung

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{D}{m} - \omega^2 & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & \frac{g}{l} + \frac{D}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} &= \omega^4 - 2\omega^2 \left( \frac{g}{l} + \frac{D}{m} \right) + \left( \frac{g}{l} + \frac{D}{m} \right)^2 - \left( \frac{D}{m} \right)^2 \\ &= \left( \omega^2 - \frac{g}{l} \right) \left( \omega^2 - \left( \frac{g}{l} + 2\frac{D}{m} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

mit Lösungen

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + 2\frac{D}{m}$$

- Eigenvektoren:

– zu  $\omega_1^2$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{D}{m_D} & -\frac{D}{\frac{B}{m}} \\ -\frac{D}{m} & +\frac{D}{\frac{B}{m}} \end{pmatrix} \vec{v} = 0, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

– zu  $\omega_2^2$ :

$$\begin{pmatrix} -\frac{D}{\frac{B}{m}} & -\frac{D}{\frac{B}{m}} \\ -\frac{D}{m} & -\frac{D}{m} \end{pmatrix} \vec{v} = 0, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- 2 Eigenschwingungen:

–

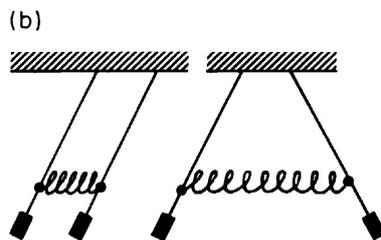
$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}$$

Pendel schwingen gleichsinnig:  $\varphi_1 = \varphi_2$

–

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t}$$

Pendel schwingen gegensinnig:  $\varphi_1 = -\varphi_2$



- Normalkoordinaten mit Gl. (11):

$$Q_1 = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$Q_2 = \varphi_1 - \varphi_2$$

Zusammenhang mit Eigenschwingungen offensichtlich da  $M \propto \delta_{ij}$

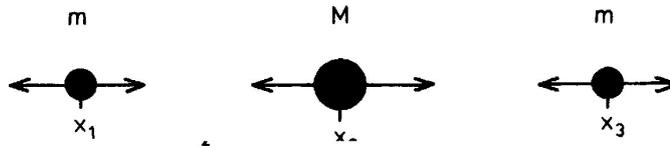
- Allgemeine Lösung im Reellen

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} a \cos(\omega_1 t + \varphi_0^1) + b \cos(\omega_2 t + \varphi_0^2) \\ a \cos(\omega_1 t + \varphi_0^1) - b \cos(\omega_2 t + \varphi_0^2) \end{pmatrix}$$

$(a, b, \varphi_0^1, \varphi_0^2)$  durch Anfangsbedingungen  $(\varphi_1(0), \dot{\varphi}_1(0), \varphi_2(0), \dot{\varphi}_2(0))$  gegeben.

### 4.3.2 Lineares dreiatomiges Molekül

- Mittleres Atom an  $x_2$  mit Masse  $M$ , äußere Atome  $x_1, x_3$  mit Masse:  $m$



Das lineare dreiatomige Molekül

- Bemerkung: Feskörperphysik
- Gleichgewichtsabstände:  $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = b$   
Annahme: Nur lineare nächste Nachbar-Wechselwirkung
- Damit für Auslenkungen aus Gleichgewichtslage

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} K & -K & 0 \\ -K & 2K & -K \\ 0 & -K & K \end{pmatrix}$$

Säkulargleichung

$$\det(K - \omega^2 M) = \begin{vmatrix} K - \omega^2 m & -K & 0 \\ -K & 2K - \omega^2 M & -K \\ 0 & -K & K - \omega^2 m \end{vmatrix} =$$

$$(K - m\omega^2)^2(2K - M\omega^2) - 2K^2(K - m\omega^2) = 0$$

$$(K - m\omega^2)\omega^2 \left( \omega^2 - \frac{K(2m + M)}{mM} \right) mM = 0$$

Damit

$$\omega_1^2 = 0 \quad \omega_2^2 = \frac{K}{m} \quad \omega_3^2 = K \left( \frac{1}{m} + \frac{2}{M} \right) > \omega_2^2$$

- Eigenvektoren

– zu  $\omega_1 = 0$

Der degenerierte Fall. Lineare Bewegung des gesamten Systems

$$\begin{pmatrix} K & -K & 0 \\ -K & 2K & -K \\ 0 & -K & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ v_1^3 \end{pmatrix} = 0$$

$$v_1^1 = v_1^2 = v_1^3 = a$$

Normierungsbedingung Gl. (9)

$$v_1 M v_1 = 1 = \sum_{ij} M_{ij} v_1^i v_1^j = (2m + M) a^2$$

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m + M}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

– zu  $\omega_2 = K/M$

$$\begin{pmatrix} 0 & -K & 0 \\ -K & 2K - KM/m & -K \\ 0 & -K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \\ v_2^3 \end{pmatrix} = 0$$

$$v_2^2 = 0, \quad v_2^1 = -v_2^3$$

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

– zu  $\omega_3 = K \left( \frac{1}{m} + \frac{2}{M} \right)$

$$\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{M(1 + M/2m)}} \begin{pmatrix} M/2m \\ -1 \\ M/2m \end{pmatrix}$$

Interpretation der "Eigenschwingungen":

$v_1$ : Geradlinig-gleichförmige Bewegung des gesamten Moleküls

$v_2$ :  $M$  in Ruhe, Atome 1 und 3 schwingen in Gegenphase

$v_3$ : \* Atome 1 und 2 schwingen gleichphasig

\* Atom 2 gegenphasig

\* aber so, daß Gesamtmolekül ruht

- Allgemeine Lösung: Überlagerung der Eigenschwingungen je nach Anfangsbedingungen

Berechnung Normalkoordinaten als Übung

Lessons learnt:

- Um Gleichgewichtspunkte linearisierte Bewegungsgleichungen zeigen Schwingungen
- Harmonisch getriebene gedämpfte lineare Systeme zeigen Resonanz
- Mehr-Körper-Systeme: Orthogonale Eigenschwingungen mit Eigenfrequenzen
- Normalkoordinaten entkoppeln die Bewegungsgleichungen

## 5 5. Woche: Newtonsche Mechanik: Für Genießer

### 5.1 Mechanische Ähnlichkeit

- Sei  $x(t)$  eine Lösung der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{r} + \nabla U(r) = 0 \quad (12)$$

- Nun:
  - Ändere  $m$  um Faktor  $\gamma > 0$
  - Ändere  $U$  um Faktor  $\delta > 0$

und betrachte Lösungen von

$$\gamma m\ddot{r} + \delta \nabla U(r) = 0 \quad (13)$$

- Suche Lösungen  $X(t)$ , die zu  $x(t)$  geometrisch ähnlich sind:

$$X(t) = \alpha x(t/\beta)$$

- $\alpha$ : Streckung der Bahn
- $\beta$ : Streckung der Zeit
- Betrachte zunächst  $\alpha = 1$ , i.e. unterschiedliche Durchlaufzeiten
- Damit  $X(t)$  Gl. (13) löst, muss gelten:

$$\gamma m\ddot{X} + \delta \nabla U(X(t)) = 0$$

oder

$$(\gamma/\beta^2)m\ddot{x}(t/\beta) + \delta \nabla U(x(t/\beta)) = 0$$

- Da  $x(t)$  Gl. (12) erfüllt, gilt

$$\frac{\gamma}{\beta^2} = \delta, \quad \beta = \sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}$$

Folgerungen:

- Erhöht sich Masse um Faktor  $\gamma$  & bleibt Potential unverändert, so verlangsamt sich Bewegung um  $\sqrt{\gamma}$
- Vergrößert man Potential um  $\delta$ , so läuft Bewegung um  $\sqrt{\delta}$  schneller ab.

Für Fall  $\alpha \neq 1$  betrachte Potentiale  $U$ , die homogene Funktionen sind.

- Für homogene Funktionen  $f(x)$  vom Grade  $k$  gilt allgemein:

$$f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$$

- Aus

$$U(\alpha r) = \alpha^k U(r)$$

folgt

$$\nabla U(\alpha r) = \nabla(U(\alpha r))\alpha \quad \text{und} \quad \nabla \alpha^k U(r) = \alpha^k \nabla U(r)$$

- Somit:

$$\nabla(U(\alpha r)) = \alpha^{k-1} \nabla U(r)$$

Nun löst  $X(t)$  Gl. (13), wenn (ein  $\alpha$  vom 1. Term)

$$\frac{\gamma}{\beta^2} = \delta \alpha^{k-2}$$

Betrachte  $\gamma = \delta = 1$ : Ähnliche Lösungen der selben Bewegungsgleichung.

$$\beta^2 = \alpha^{2-k}$$

Beispiele:

- Harmonischer Oszillator

$$U(r) \propto r^2, k = 2 \implies \beta = 1$$

Interpretation  $\beta = 1$ : Beim Harmonischen Oszillator ist die Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude

- Keplerproblem

$$U(r) \propto r^{-1}, k = -1 \implies \beta^2 = \alpha^3$$

Interpretation  $\beta^2 = \alpha^3$ : Fast Kepler III

5. Mo.

## 5.2 Virialsatz

- Virialsatz: Aussagen über Mittelwerte von kinetischer und potentieller Energie für Mehr-Körper-Probleme
- Definition: Zeitlicher Mittelwert einer beschränkten Funktion  $f(t)$ :

$$\bar{f} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t f(t') dt'$$

- Betrachte:

$$\begin{aligned}
 2T &= \sum m_i \dot{r}_i \dot{r}_i = \sum p_i \dot{r}_i \\
 &= \left( \frac{d}{dt} \sum p_i r_i \right) - \sum r_i \dot{p}_i \\
 &= \left( \frac{d}{dt} \sum p_i r_i \right) + \sum r_i \nabla_i U
 \end{aligned}$$

- Bilde zeitliche Mittel

$$\begin{aligned}
 2\bar{T} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t dt' \frac{d}{dt'} \sum p_i r_i + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t dt' \sum r_i \nabla_i U \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \sum p_i r_i \Big|_{-t}^t + \overline{\sum r_i \nabla_i U}
 \end{aligned}$$

- Ist  $\sum p_i r_i$  beschränkt für alle Zeiten, so folgt der Virialsatz:

$$\boxed{2\bar{T} = \overline{\sum r_i \nabla_i U}} \quad (14)$$

- $\overline{\sum r_i \nabla_i U}$  heißt Virial des Potentials  $U$ .
- Annahme:  $U(r_1, r_2, \dots, r_N)$  sei homogen vom Grade  $k$ :

$$U(\alpha r_1, \alpha r_2, \dots, \alpha r_N) = \alpha^k U(r_1, r_2, \dots, r_N)$$

Differenziere nach  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \alpha} U(\alpha r_1, \alpha r_2, \dots, \alpha r_N) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha^k U(r_1, r_2, \dots, r_N) \\
 \text{LHS: } \frac{\partial}{\partial \alpha} U(\alpha r_1, \alpha r_2, \dots, \alpha r_N) &= \sum_i \frac{\partial U}{\partial \alpha r_i} \frac{\partial \alpha r_i}{\partial \alpha} = \sum_i \frac{\partial U}{\partial \alpha r_i} r_i
 \end{aligned}$$

$$\text{RHS: } \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha^k U(r_1, r_2, \dots, r_N) = k \alpha^{k-1} U(r_1, r_2, \dots, r_N)$$

$$\text{ergo: } \sum_i \frac{\partial U}{\partial \alpha r_i} r_i = k \alpha^{k-1} U(r_1, r_2, \dots, r_N)$$

- Setze  $\alpha = 1$  (typischer Trick)

$$\boxed{\sum r_i \nabla_i U = kU} \quad (15)$$

Eulersche Gleichung für homogene Funktionen.

Leonhard Euler \* 1701 † 1783

Beispiele:

- Newtonsche Gravitation, Coulomb

$$U(r) = \frac{\kappa}{r}, \quad k = -1$$

$$\nabla U = -\frac{\kappa}{r^2} \vec{r}$$

Ergo:

$$\vec{r} \nabla U = -\frac{\kappa}{r} = -U$$

- Harmonischer Oszillator:

$$U(r) = \frac{1}{2} D r^2, \quad k = 2$$

$$\vec{r} \nabla U = \vec{r} D \vec{r} = D r^2 = 2U$$

Es folgt aus Gl. (14,15):

$2\bar{T} = k\bar{U}$
-----------------------

Wegen:

$$E = \bar{E} = \bar{T} + \bar{U} = [(k/2) + 1]\bar{U}$$

gilt für  $k \neq -2$

$$\bar{U} = \frac{2}{2+k} E, \quad \bar{T} = \frac{k}{2+k} E$$

Fall  $k = -2$ :

Erster Blick:  $2\bar{T} = -2\bar{U}$ , also nur  $E = 0$  erlaubt

Trifft aber nicht zum, da Voraussetzungen nicht erfüllt:

- Abstoßendes Potential:
  - Bahnen nicht gebunden
  - $\sum p_i r_i$  nicht beschränkt
- Anziehendes Potential:
  - $T, U$  unbeschränkt, siehe letzte Übung

Anwendungen:

- Harmonischer Oszillator:  $k = 2$

$$\bar{U} = \frac{1}{2} E, \quad \bar{T} = \frac{1}{2} E$$

Gilt in guter Näherung auch z.B. für Atomschwingungen in Kristallen.

- Newtonsches Gravitationsgesetz:  $k = -1$

$$\bar{U} = 2E, \quad \bar{T} = -E$$

Beachte:  $E < 0$ , sonst  $\sum p_i r_i$  nicht beschränkt

### 5.3 Scheinkräfte

- Sei  $S$  Inertialsystem
- Sei  $S'$  System, das mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega = |\vec{\omega}|$  um Richtung  $\hat{\omega} = \vec{\omega}/\omega$  rotiert.

$S'$  kein Inertialsystem

- Umrechnung für Vektor  $\vec{z}(t)$  am Orte  $\vec{r}(t)$

$$z' = z - \omega \times r$$

- Betrachte Geschwindigkeit

$$v' = v - \omega \times r, \quad \frac{d'}{dt}r = \frac{d}{dt}r - \omega \times r, \quad \frac{d}{dt}r = \frac{d'}{dt}r + \omega \times r$$

Betrachte  $\ddot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{v}}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}r &= \frac{d'}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \right) + \omega \times \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{d'}{dt} \left( \frac{d'}{dt}r + \omega \times r \right) + \omega \times \left( \frac{d'}{dt}r + \omega \times r \right) \\ &= \frac{d'^2}{dt^2}r + 2\omega \times \frac{d'}{dt}r + \omega \times (\omega \times r) \end{aligned}$$

Falls  $\omega$  zeitabhängig, zusätzlicher Term:  $\dot{\omega} \times r$ , Übung

- Da  $S$  Inertialsystem, gilt

$$m \frac{d^2}{dt^2}r = F$$

Eingesetzt, ergibt für Beschleunigung in  $S'$

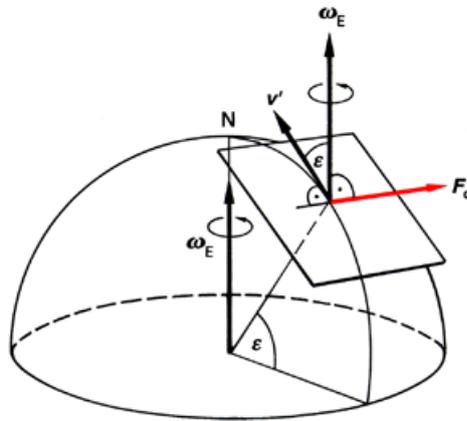
$$m \frac{d'^2}{dt^2}r = F - 2m\omega \times \frac{d'}{dt}r - m\omega \times (\omega \times r)$$

Massenpunkt in  $S'$  erfährt außer "wahrer" Kraft  $F$  noch die Scheinkräfte

- Coriolis-Kraft:  $-2m\omega \times v'$
- Zentrifugal-Kraft:  $-m\omega \times (\omega \times r)$

## Coriolis-Kraft

Hängt von Geschwindigkeit in  $S'$  ab



Beispiel: Rotierende Erde

- Tangentiale Bewegung:
  - Nur  $\omega_v$  wirksam
  - Rechtsabweichung auf Nordhalbkugel
  - Linksabweichung auf Südhalbkugel
  - Drehrichtung von Hoch- und Tiefdrucksystemen
  - Bsp: Tiefdrucksystem



- Vertikale Bewegung:  
Ausfuehren oder als Uebung

Lessons learnt:

- Homogenitätseigenschaften des Potentials :
  - Mechanische Ähnlichkeit: Raumzeitliche Skalierungen
  - Virialsatz: Mittelwerte der kinetischen und potentiellen Energie
- Nichtinertialsysteme ergeben Scheinkräfte

## 6 6. Woche: Lagrangesche Mechanik: Gleichungen 1. & 2. Art

Joseph-Louis Lagrange \* 1736 † 1813

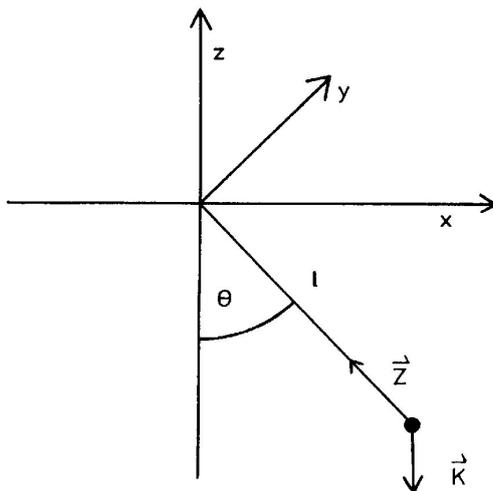
Newtonsche Mechanik: Alle Kräfte müssen bekannt sein.

Häufiger Fall:

- Es sind nicht alle Kräfte bekannt, aber ...
- ... ihre Wirkung
- Konkret: Einschränkung der Bewegung auf gewisse Flächen
- Denke an Achterbahn

Einführendes Beispiel: Pendel

- Betrachte 3D Pendel



Das Pendel mit der Pendellänge  $l$

- Auf Massenpunkt wirken zwei Kräfte:
  - Gravitationskraft  $\vec{F}_G$
  - (Noch) unbekannte Zwangskraft, die System auf Kugelschale  $\vec{r}^2 = l^2$  zwingt.
- Zwangskraft  $\vec{Z}(t)$ :
  - Wirkt in Richtung des Aufhängepunktes
  - Resultierende Kraft bewirkt Bewegung auf Kugelschale:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_G(\vec{r}) + \vec{Z}(t)$$

- $\vec{Z}(t)$  a priori unbekannt

- Aber Wirkung bekannt: Sorgt für  $\dot{r}^2 = l^2$
- Mögliche Lagen des Systems: Zweidimensionale Fläche
  - Bekannte Kraft  $\vec{F}$  bewirkt Bewegung auf der Fläche, ...
  - ... auf der  $\vec{Z}(t)$  immer senkrecht stehen muss.

Zwei Ansätze zur Lösung :

- (i) Nutze: Zwangskraft steht senkrecht auf Fläche

Hier

$$\vec{Z}(t) = \lambda(t)\vec{r}$$

und löse das erweiterte Problem

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_G(\vec{r}) + \lambda(t)\vec{r} \\ \dot{r}^2(t) &= l^2 \end{aligned}$$

Geht, da 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten  $\vec{r}(t)$ ,  $\lambda(t)$ .

Dies ist die Lagrange-Methode 1. Art

- (ii) Projiziere die Bewegungsgleichung auf die Fläche

- Finde Vektoren, die tangential zur Fläche liegen.
- Multipliziere Bewegungsgleichung damit
- Eliminiert  $\vec{Z}(t)$ , projiziert Bewegungsgleichung auf die Fläche
- Beste Wahl: "Natürliche" Koordinaten
  - \* Ein Teil parametrisiert frei die Fläche
  - \* Ein Teil hält durch feste Werte die Zwangsbedingung ein

Hier:

- Natürliche Koordinaten: Polarkoordinaten

$$\vec{r} = r(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, -\cos \theta)$$

- \*  $\theta, \varphi$  parametrisieren Fläche
- \*  $r$  fixiert Zwangsbedingung
- Aus  $\dot{r}^2(\theta, \varphi) = l^2$  folgt durch Ableiten:

$$\vec{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = 0, \quad \vec{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = 0$$

Anschauliche Interpretation

- Multiplikation von

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) + \vec{Z}(t)$$

mit  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$  und  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$  ergibt zwei Gleichungen für die freien Variablen:

$$m\ddot{\vec{r}}(\theta(t), \varphi(t)) \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}(\theta(t), \varphi(t)) = \vec{F}(\vec{r}(\theta(t), \varphi(t))) \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}(\theta(t), \varphi(t))$$

$$m\ddot{\vec{r}}(\theta(t), \varphi(t)) \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(\theta(t), \varphi(t)) = \vec{F}(\vec{r}(\theta(t), \varphi(t))) \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(\theta(t), \varphi(t))$$

- Zwangskraft läßt sich *post hoc* bestimmen

$$\vec{Z}(t) = m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}(\vec{r})$$

Dies ist die Lagrange-Methode 2. Art

## 6.1 Lagrange Gleichungen 1. Art

- Betrachte

- System mit  $N$  Punktteilchen mit Ortsvektoren  $\vec{r}_i$  zusammengefaßt zu  $\underline{z} \in R^{3N}$
- $s$  unabhängige Zwangsbedingungen ( $F$  wie Fläche)

$$F_\alpha(\underline{z}, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, s$$

Unabhängigkeit erklären

- Für jedes  $\alpha$  stellt die Menge

$$M_t^\alpha = \{\underline{z} | \underline{z} \in R^{3N}, F_\alpha(\underline{z}, t) = 0\}$$

eine  $(3N - 1)$  dimensionale Fläche, oder auch Mannigfaltigkeit im  $R^{3N}$  dar.

- Mannigfaltigkeit

- "Lokal glatt bündelbar"
- Lokal auf  $R^m$  abbildbar
- Beispiele: Kreisumfang, Kugeloberfläche, Möbiusband
- Lokale Karten, globaler Atlas

- Die Mannigfaltigkeit

$$M_t = \bigcap_{\alpha=1}^s M_t^\alpha$$

ist die Menge aller möglichen Lagepunkte.

Sie hat die Dimension:

$$f = 3N - s$$

$f$ : Anzahl der Freiheitsgrade

- Nomenklatur:
  - Holonom-rheonome Zwangsbedingungen:  $F_\alpha(\underline{z}, t) = 0$
  - Holonom-skleronome Zwangsbedingungen:  $F_\alpha(\underline{z}) = 0$
  - Nichtholonom:  $F_\alpha(\underline{z}, \dot{\underline{z}}, t) = 0$
- Bis auf weiteres: Betrachte nur holonome Zwangsbedingungen
- Virtuelle Verrückungen  
Tangentialvektoren an  $M_t$  heißen virtuelle Verrückungen

Formalisierung:

- Jeder Tangentialvektor  $\underline{\xi}^\alpha$  an  $M_t^\alpha$  im Punkt  $\underline{z}_0$  ist darstellbar als:

$$\underline{\xi}^\alpha = \left. \frac{d\underline{z}(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0}$$

mit  $\underline{z}(\sigma)$  Kurve in  $M_t^\alpha$ , die bei  $\sigma = 0$  in  $\underline{z}_0$  beginnt.

- Aus  $F_\alpha(\underline{z}(\sigma), t) = 0$  folgt

$$\left. \frac{d}{d\sigma} F_\alpha(\underline{z}(\sigma), t) \right|_{\sigma=0} = \frac{d\underline{z}(\sigma)}{d\sigma} \cdot \underline{\nabla} F_\alpha(\underline{z}(\sigma), t) \Big|_{\sigma=0} = \underline{\xi}^\alpha \cdot \underline{\nabla} F_\alpha(\underline{z}_0, t) = 0$$

- Damit: Auf  $M_t^\alpha$  senkrechte Vektoren sind parallel zu  $\underline{\nabla} F_\alpha(\underline{z}, t)$  und Zwangskraft läßt sich als Linearkombination darstellen:

$$\underline{Z}(t) = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha(t) \underline{\nabla} F_\alpha(\underline{z}, t)$$

Konkreter:

- Sei  $M_t$  parametrisiert durch  $f$  Variablen  $q_1, \dots, q_f$ .

Dann ist

- $\underline{z}(q_1, \dots, q_f, t) \in M_t$
- $\partial \underline{z} / \partial q_i$  eine virtuelle Verrückung, Tangentialvektor an  $M_t$

- Allgemeine virtuelle Verrückung:

$$\delta \underline{z} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \underline{z}}{\partial q_i} \delta q_i = (\delta r_1, \dots, \delta r_N)$$

Dass  $\underline{Z}(t)$  senkrecht auf  $M_t$ , i.e.

$$\underline{Z}(t) \cdot \delta \underline{z} = \sum_i \vec{Z}_i(t) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

heißt d' Alembertsches Prinzip ("4. Newtonsches Gesetz").

Beinhaltet:

- $\vec{Z}_i(t) \cdot \delta \vec{r}_i = [\text{Arbeit}]$ , d.h. Zwangskräfte verrichten keine (virtuelle) Arbeit entlang virtueller Verrückungen.
- Bei skleronomen Bedingungen: Virtuelle Verrückungen = Realisierbare Verrückungen, i.e. sie verrichten auch keine reelle Arbeit.

Lassen sich die Kräfte durch ein Potential ableiten, so gilt zusammenfassend :

Lagrange-Gleichungen 1. Art

$$m\ddot{r}_i(t) = -\nabla U(r_1(t), \dots, r_N(t), t) + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha}(t) \nabla_i F_{\alpha}(r_1(t), \dots, r_N(t), t)$$

$$F_{\alpha}(r_1(t), \dots, r_N(t), t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, s$$

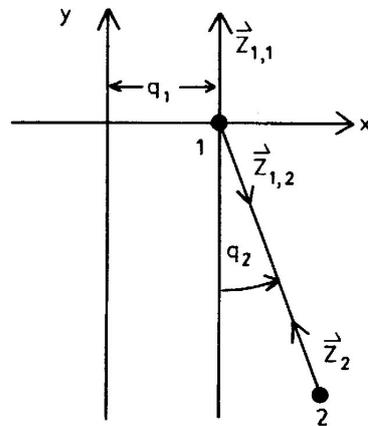
$3N + s$  Gleichungen für  $r_1(t), \dots, r_N(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_s(t)$

Technisch sehr wichtig

6. Mo.

**6.1.1 A worked example**

- Betrachte
  - 2 Massenpunkte, starr verbunden mit Abstand  $l$
  - Massenpunkt 1 kann sich nur entlang  $x$ -Achse bewegen
  - Betrachte nur Bewegung in  $xy$ -Ebene



Zwei Massenpunkte sind starr durch eine Stange der Länge  $l$  verbunden. Massenpunkt 1 kann sich auf der  $x$ -Achse bewegen. Die Richtung der Zwangskräfte und die verallgemeinerten Koordinaten sind dargestellt

- Mit Koordinaten

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1), \quad \vec{r}_2 = (x_2, y_2)$$

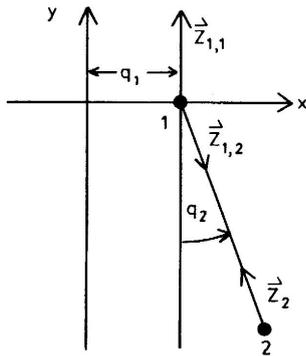
lauten Zwangsbedingungen

$$F_1 = y_1 = 0, \quad F_2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0$$

- Zwangskräfte:

$$\begin{aligned}\vec{Z}_1 &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1} \right) (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) \\ &= (2\lambda_2(x_1 - x_2), \lambda_1 + 2\lambda_2(y_1 - y_2)) \\ \vec{Z}_2 &= \left( \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_2} \right) (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) \\ &= (-2\lambda_2(x_1 - x_2), -2\lambda_2(y_1 - y_2))\end{aligned}$$

Vereinfachung durch Koordinaten:  $(x_1, \varphi)$



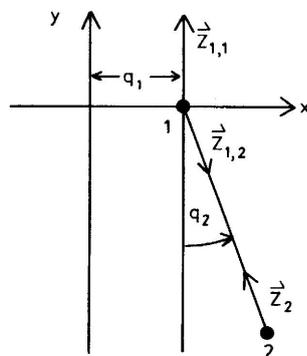
Zwei Massenpunkte sind starr durch eine Stange der Länge  $l$  verbunden. Massenpunkt 1 kann sich auf der  $x$ -Achse bewegen. Die Richtung der Zwangskräfte und die verallgemeinerten Koordinaten sind dargestellt

Dann

$$y_1 = 0, \quad x_2 = x_1 + l \sin \varphi = x_2(x_1, \varphi), \quad y_2 = -l \cos \varphi = y_2(x_1, \varphi)$$

und Zwangskräfte:

$$\begin{aligned}\vec{Z}_1 &= (-2\lambda_2 l \sin \varphi, \lambda_1 + 2\lambda_2 l \cos \varphi) \\ &= (0, \lambda_1) - 2\lambda_2 l (\sin \varphi, -\cos \varphi) \\ \vec{Z}_2 &= 2\lambda_2 l (\sin \varphi, -\cos \varphi)\end{aligned}$$



Zwei Massenpunkte sind starr durch eine Stange der Länge  $l$  verbunden. Massenpunkt 1 kann sich auf der  $x$ -Achse bewegen. Die Richtung der Zwangskräfte und die verallgemeinerten Koordinaten sind dargestellt

- Interpretation:

- $Z_1$ -Beitrag  $(0, \lambda_1)$  in  $y$ -Richtung hält Teilchen auf  $x$ -Achse.
- Zweiter  $Z_1$ -Beitrag ist entgegengesetzt gleich zu  $Z_2$ : Hält Abstand

Virtuelle Verrückungen:

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x_1} = (1, 0)', \quad \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} = (0, 0)', \quad \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial x_1} = (1, 0)', \quad \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \varphi} = l(\cos q_2, \sin q_2)'$$

- D'Alembersches Prinzip

- Virtuelle  $x_1$ -Verrückung:

$$\begin{aligned} \vec{Z}_1 \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x_1} + \vec{Z}_2 \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial x_1} &= 0 \\ \vec{Z}_1(1, 0)' + \vec{Z}_2(1, 0)' &= (0, 0)' \end{aligned}$$

Interpretation:  $x$ -Komponenten der Zwangskräfte addieren sich zu Null.

- Virtuelle  $\varphi$ -Verrückung:

$$\begin{aligned} \vec{Z}_1 \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} + \vec{Z}_2 \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \varphi} &= 0 \\ \vec{Z}_2 l(\cos \varphi, \sin \varphi)' &= (0, 0)' \end{aligned}$$

Interpretation:  $Z_2$  zeigt von MP 2 zu MP1

- Lagrange Gleichungen 1. Art

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= m_1 \vec{g} + \vec{Z}_1 \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= m_2 \vec{g} + \vec{Z}_2 \end{aligned}$$

mit Zwangsbedingungen:

$$F_1 = y_1 = 0, \quad F_2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0$$

damit lösbar.

Lösung:

- Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= Z_{1x} \\ m_1 \ddot{y}_1 &= Z_{1y} - m_1 g \\ m_2 \ddot{x}_2 &= Z_{2x} \\ m_2 \ddot{y}_2 &= Z_{2y} - m_2 g \end{aligned}$$

Durch  $x_1$  und  $\varphi$  ausgedrückt,  $y_1 = 0$  ausgenutzt

$$m_1 \ddot{x}_1 = Z_{1x} \tag{16}$$

$$m_1 g = Z_{1y} \tag{17}$$

$$m_2(\ddot{x}_1 + l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = Z_{2x} \tag{18}$$

$$m_2(l\ddot{\varphi} \sin \varphi + l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + g) = Z_{2y} \tag{19}$$

- Es gilt

$$Z_{1x} = -Z_{2x}, \quad Z_{2x}/Z_{2y} = -\tan \varphi$$

Multipliziere Gl. (18) mit  $\cos \varphi$  und Gl. (19) mit  $\sin \varphi$  und addiere, ergibt

$$\ddot{x}_1 \cos \varphi + l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0 \quad (20)$$

- Addition von Gl. (16) und Gl. (18)

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = m_2l(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) \quad (21)$$

- Merke: Zwangskräfte durch geometrische Untersuchungen der Nebenbedingungen eliminiert.
- Nichtlineares System: Betrachte kleine Auslenkungen in  $\varphi$

$$\begin{aligned} \sin \varphi &\approx \varphi \\ \cos \varphi &\approx 1 \\ \dot{\varphi}^2 &\text{ vernachlässigen} \end{aligned}$$

Damit

$$\ddot{x}_1 + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2l\ddot{\varphi} = 0$$

Ergibt:

$$\ddot{\varphi} \left( 1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

oder

$$\ddot{\varphi} + \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) \frac{g}{l} \varphi = 0$$

- Das bedeutet:

$$\varphi(t) = \varphi^0 \cos(\omega(t - t_0)), \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l}$$

$$x_1(t) = -\frac{m_2l}{m_1 + m_2} \varphi^0 \cos(\omega(t - t_0)) + \alpha_0 + \alpha_1 t$$

- Interpretation:

- Pendel schwingt mit veränderter Frequenz
- Aufhängepunkt schwingt mit dieser Frequenz
- Für  $m_1 \rightarrow \infty$  wird es wie erwartet, i.e.  $x_1(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ ,  $\omega^2 = g/l$

Einfacherer Weg: 2. Strategie. Theorie im folgenden.

- Koordinaten:  $(q_1, q_2) = (x_1, \varphi)$
- Multipliziere Bewegungsgleichungen mit virtuellen Verrückungen  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} = (1, 0)', \quad \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_2} = (0, 0)', \quad \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_1} = (1, 0)', \quad \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_2} = l(\cos q_2, \sin q_2)'$$

und benutze d'Alembertsches Prinzip.

Mit

$$\vec{F}_{G_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_i g \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} &= \vec{F}_{G_1} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} + \vec{Z}_1 \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} \\ m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_2} &= \vec{F}_{G_1} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_2} + \vec{Z}_1 \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_2} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_1} &= \vec{F}_{G_2} \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_1} + \vec{Z}_2 \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_1} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_2} &= \vec{F}_{G_2} \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_2} + \vec{Z}_2 \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_2} \end{aligned}$$

Addiere

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_1} &= \vec{F}_{G_1} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} + \vec{Z}_1 \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} + \vec{F}_{G_2} \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_1} + \vec{Z}_2 \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_1} \\ &= \vec{F}_{G_1} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} + \vec{F}_{G_2} \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_1} + \vec{Z}_1 \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} + \vec{Z}_2 \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_1} \end{aligned}$$

ergibt:

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0$$

mit

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi$$

folgt Gl. (21)

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 = m_2 l (\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi)$$

Entsprechend (ohne Vektorpfeile)

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{r}_1 \frac{\partial r_1}{\partial q_2} + m_2 \ddot{r}_2 \frac{\partial r_2}{\partial q_2} &= F_{G_1} \frac{\partial r_1}{\partial q_2} + Z_1 \frac{\partial r_1}{\partial q_2} + F_{G_2} \frac{\partial r_2}{\partial q_2} + Z_2 \frac{\partial r_2}{\partial q_2} \\ &= F_{G_1} \frac{\partial r_1}{\partial q_2} + F_{G_2} \frac{\partial r_2}{\partial q_2} + Z_1 \frac{\partial r_1}{\partial q_2} + Z_2 \frac{\partial r_2}{\partial q_2} \end{aligned}$$

ergibt

$$m_2 \ddot{x}_2 \cos \varphi + m_2 \ddot{y}_2 \sin \varphi = -m_2 g \sin \varphi$$

mit

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi, \quad y_2 = -l \cos \varphi$$

folgt

$$m_2 \cos \varphi (\ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) + m_2 \sin \varphi (g + l \ddot{\varphi} \sin \varphi + l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) = 0$$

Ergibt Gl. (20)

$$\ddot{x}_1 \cos \varphi + l \ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$$

- Uebung Lagrange 1. Art Beispiel

## 6.2 Lagrange Gleichungen 2. Art

Idee Lagrange 2. Art: "Projiziere die Bewegungsgleichung auf die Fläche"  
Wiederholung

- ZEICHNUNG Pendel
- Lagrange 1. Art

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= F + Z \\ r^2 &= l^2 \end{aligned}$$

- Lagrange 2. Art

$$\vec{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = 0$$

Formalisierung:

- Der Einfachheit halber: O.B.d.A.: holonome Zwangsbedingungen
- Führe geeignete Koordinaten auf  $M$  ein:

$$\vec{q} = (q_1, \dots, q_f), \quad f = 3N - s$$

Dann:

$$r_i = r_i(q_1, \dots, q_f, t)$$

Zwangsbedingungen  $F_\alpha(\vec{r}(t), t) = 0$  automatisch erfüllt.

- Ab jetzt  $q = (q_1, \dots, q_f)$ , wenn klar
- Abgeleitet:

$$\dot{r}_i = \sum_k \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t} = \dot{r}_i(q, \dot{q}, t)$$

Eingesetzt in kinetische Energie in kartesischen Koordinaten

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{r}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{kl} m_{kl}(q, t) \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_k b_k(q, t) \dot{q}_k + c(q, t)$$

$T$  maximal quadratisch in  $\dot{q}_i$

- Hängt  $r_i(q, t)$  nicht von  $t$  ab:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{kl} m_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l$$

Lemma:

- Sei kinetische Energie in den Koordinaten  $q$  gegeben durch:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i^2 = T(q_1, q_2, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f)$$

Ableitungen

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i m_i \dot{r}_i \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} \quad (22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{r}_i \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (23)$$

Dann gilt:

$$\frac{\partial \underline{z}}{\partial q_j} \dot{p} \equiv \sum_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} m_i \ddot{r}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

Beweis:

- Es gilt:

$$\frac{\partial \underline{z}}{\partial q_j} \dot{p} \equiv \sum_i m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - \sum_i m_i \dot{r}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad (24)$$

- Wegen

$$\dot{r}_i = \frac{d}{dt} r_i(q_1(t), q_2(t), \dots, q_f(t), t) = \sum_{k=1}^f \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t}$$

gilt

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \quad (25)$$

Ferner

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_{k=1}^f \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} \quad (26)$$

- Einsetzen von Gln. (25, 26) in Gl. (24) ergibt mit Gln. (22, 23):

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \dot{r}_i \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_i m_i \dot{r}_i \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

Zur Sache:

- Multipliziere Bewegungsgleichung:

$$\dot{p}(t) = -\underline{\nabla} U(\underline{z}(t), t) + \underline{Z}(t)$$

mit Tangentialvektoren  $\partial \underline{z} / \partial q_j$  an  $M_t$ .

- Da

$$(\partial z / \partial q_j) Z = 0$$

folgt:

$$\frac{\partial z}{\partial q_j} \dot{p} = - \frac{\partial z}{\partial q_j} \nabla U = - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (27)$$

$$F = - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad \text{heißt generalisierte Kraft}$$

- Mit Hilfe des Lemma

$$\frac{\partial z}{\partial q_j} \dot{p} = \sum_i m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

folgt:

$f$  Differentialgleichungen für die  $q_j(t)$ : Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, f$$

mit Lagrange-Funktion

$$L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = T(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) - U(q_1, \dots, q_f)$$

Gegeben  $T$  und  $U$  ist Lagrange-Funktion bekannt.

Wichtig:

- Keine Kräfte in  $R^{3N}$  mehr, ...
  - ... sondern skalare Energien
- ⇒ Sehr viel einfacher zu berechnen

Liegen keine Zwangskräfte vor, so können  $q_i$  auch kartesische Koordinaten sein

$$L(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{r}_i^2 - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

- Dann ist

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{d}{dt} m_i \dot{\vec{r}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$$

- Somit sind Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

identisch mit Newtonscher Bewegungsgleichung

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$$

### 6.2.1 Energieerhaltung

- Betrachte folgende Zeitableitungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i &= \sum_{i=1}^f \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \end{aligned}$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}$$

- Ergibt:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (28)$$

Folgt Erhaltungssatz:

$$\text{Wenn } \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \text{dann} \quad \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad \text{erhalten}$$

- Hängen Zwangsbedingungen nicht von Zeit ab, gilt

$$T = \sum_{kl} m_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l \quad (29)$$

und damit

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T \quad (30)$$

- Somit folgt

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - (T - U) = E \quad (31)$$

Hängt Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit ab, ist die Energie erhalten.

### 6.2.2 Kanonisch konjugierte oder verallgemeinerte Impulse und zyklische Koordinaten

Definitionen:

- Die Größen

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

heißen kanonisch konjugierte oder verallgemeinerte Impulse.

- Motivation:

Für

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r) \quad \text{folgt} \quad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}}$$

- Wird bei Hamiltonscher Mechanik, Kapitel 11 zentral
- Koordinate  $q_i$ , von der  $L$  nicht abhängt, heißt zyklisch.

Wegen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

gilt

Der verallgemeinerte Impuls einer zyklischen Koordinate ist erhalten

Das ist in der Newtonschen Mechanik so nicht möglich.

### 6.2.3 Reibung

- Betrachte Spezialfall: Stokessche Reibung  $F_{R_i} = -\kappa\dot{r}_i$
- Reibungskräften kann kein Potential zugeordnet werden.
- Daher zurück zu Gl. (27)

$$\frac{\partial z}{\partial q_j} \dot{p} = -\frac{\partial z}{\partial q_j} \nabla U = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

Zusatzterm:

$$Q_j = \frac{\partial z}{\partial q_j} F_R$$

- Definiere Rayleighsche Dissipationsfunktion:

$$D(\dot{r}) = \frac{1}{2} \sum \kappa \dot{r}_i^2, \quad D(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \sum \kappa \dot{r}_i^2(q, \dot{q}, t)$$

- Nun, mit Gl. (25)  $\frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial r}{\partial q}$

$$Q_k = -\sum_i \frac{\partial D}{\partial \dot{r}_i} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = -\sum_i \frac{\partial D}{\partial \dot{r}_i} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{von Projektion zur Kettenregel}$$

- Analog auch für Reibung der Form

$$\vec{F}_R = -\kappa h(|\dot{r}|) \dot{\vec{r}}$$

z.B. Luftreibung

- Ergibt modifizierte Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad j = 1, \dots, f$$

- Bei allgemein dissipativen Systemen, Kapitel 13, nicht möglich.

Lessons learnt:

- Zwangsbedingungen lassen sich durch Newton schwer behandeln
- Lagrange 1. Art: Integriere Zwangskräfte in Newtonsche Bewegungsgleichungen
- Lagrange 2. Art: Projiziere Bewegungsgleichungen auf Zwangsbedingungen  
Führt zu Lagrangefunktion und Lagrangeschen Bewegungsgleichungen
- Hängt die Lagrangefunktion von einer Koordinate nicht ab, so heisst diese zyklisch, und der zugehörige kanonisch konjugierte Impuls ist erhalten.

7. Mo.

## 7 7. Woche: Lagrangesche Mechanik: Anwendungen

Kapitelinhaltsverzeichnis zeigen

### 7.1 Newton revisited

Beispiel:

Lineare Näherungen analog Kapitel 4 Lineare Schwingungen

- Lagrange-Funktion:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{ij} g_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q)$$

- Punkt  $q^0$  heißt Gleichgewichtspunkt, wenn die Bahnkurve  $q(t) = q^0$ ,  $\dot{q}(t) = 0$  Lösung der Bewegungsgleichungen ist

- Es gilt

$q_0$  Gleichgewichtspunkt, genau dann wenn

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{q^0} = 0$$

Begründung:

Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$$

Für  $\dot{q}(t) = 0$ , da  $\partial T / \partial \dot{q}$  und  $\partial T / \partial q_i$  noch von  $\dot{q}_i$  abhängen, bleibt nur die Behauptung

- In Nähe des Gleichgewichtes:  $q_i = q_0 + \eta_i$

- Dann

$$\begin{aligned}
 U(q_1, \dots, q_f) &= U(q_1^0, \dots, q_f^0) + \sum_i \left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{q^0} \eta_i \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q^0} \eta_i \eta_j + O(\eta^3) \\
 &= U(q^0) + \frac{1}{2} \sum_{ij} K_{ij} \eta_i \eta_j + O(\eta^3)
 \end{aligned}$$

mit

$$K_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q^0}$$

- Analog mit  $\dot{q}_i = \dot{\eta}_i$

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{ij} g_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{ij} g_{ij}(q^0) \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$$

- Damit das linearisierte System:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - K_{ij} \eta_i \eta_j$$

mit Bewegungsgleichung

$$\sum_j M_{ij} \ddot{\eta}_j + K_{ij} \eta_j = 0, \quad \forall i$$

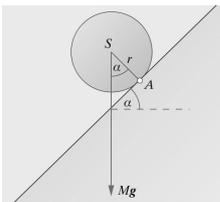
Normalkoordinaten:

- $$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - K_{ij} \eta_i \eta_j = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2$$

- Jedes Newton-Problem ist in Lagrange formulierbar.

## 7.2 Lagrange 1. vs. 2. Art

### 7.2.1 Schiefe Ebene



Lagrange 1. Art

- Zwangsbedingung:

$$F(x, y) = x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0$$

Lagrange Gleichungen 1. Art

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mge_y + \lambda \nabla F$$

In Komponenten:

$$m\ddot{x} = \lambda \sin \alpha$$

$$m\ddot{y} = -mg - \lambda \cos \alpha$$

- Elimination von  $\lambda$  (typischer Trick neben den geometrischen Überlegungen von oben):

Zweifache Differentiation von  $F(x, y)$  nach der Zeit

$$\ddot{x} \sin \alpha - \ddot{y} \cos \alpha = 0$$

Einsetzen der Bewegungsgleichungen

$$\lambda \sin^2 \alpha + \lambda \cos^2 \alpha + mg \cos \alpha = 0$$

Ergibt

$$\lambda = -mg \cos \alpha$$

- In Bewegungsgleichung eingesetzt:

$$m\ddot{x} = -mg \cos \alpha \sin \alpha$$

$$m\ddot{y} = -mg + mg \cos^2 \alpha = -mg \sin^2 \alpha$$

- Lösung

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \cos \alpha \sin \alpha + a_1 t + a_2$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \sin^2 \alpha + b_1 t + b_2$$

Zwangskraft:

$$\vec{Z} = -mg \sin \alpha \cos \alpha e_x + mg \cos^2 \alpha e_y, \quad |Z| = mg \cos \alpha$$

Mit

$$x(t) = s(t) \cos \alpha$$

$$y(t) = s(t) \sin \alpha$$

Bewegung auf der Ebene

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha + v_0 t + s_0$$

## Lagrange 2. Art

- Wähle  $s$  als verallgemeinerte Koordinate

$$x(t) = s(t) \cos \alpha \quad y(t) = s(t) \sin \alpha \quad (32)$$

- Aus

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad \text{und} \quad U = mgy$$

folgt

$$L(s, \dot{s}) = T - U = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - mgs \sin \alpha$$

- Lagrangegleichung

$$m\ddot{s} = -mg \sin \alpha$$

- Lösung

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha + v_0 t + s_0$$

- Da weder  $L$  noch Transformation Gl. (32) explizit von Zeit abhängen, gilt Energieerhaltung

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{s}^2(t) + mgs(t) \sin \alpha = \text{const}$$

## 7.3 Das sphärische Pendel

- Mathematisches Pendel in 3 Dimensionen mit  $\vec{r} = (x, y, z)$
- Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= -r \cos \theta \end{aligned}$$

Zwangsbedingung:  $r = l$ ,  $\vec{r} = \vec{r}(\theta, \varphi)$

- 

$$\dot{\vec{r}} = l(\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi, \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi, \dot{\theta} \sin \theta)$$

Damit:

$$\dot{\vec{r}}^2 = l^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)$$

Folglich:

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - mgl(1 - \cos \theta)$$

Bewegungsgleichung für  $\theta$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$ml^2(\ddot{\theta} - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta) + mgl \sin \theta = 0 \quad (33)$$

- Bewegungsgleichung für  $\varphi$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta) = 0,$$

$\varphi$  zyklisch, da  $L$  nicht von  $\varphi$  abhängt.

Es folgt:

$$p_\varphi = ml^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta \quad (34)$$

ist erhaltene Größe.

Ergibt Erstes Integral für  $\varphi$ .

- Interpretation  $p_\varphi$ :

Betrachte  $z$ -Komponente des Drehimpulses:

$$\begin{aligned} L_z &= m(xy\dot{y} - y\dot{x}) \\ &= ml^2(\sin\theta \cos\varphi(\dot{\theta} \cos\theta \sin\varphi + \dot{\varphi} \sin\theta \cos\varphi) - \sin\theta \sin\varphi(\dot{\theta} \cos\theta \cos\varphi - \dot{\varphi} \sin\theta \sin\varphi)) \\ &= ml^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta \\ &= p_\varphi \end{aligned}$$

Anschauung: Auf  $z$ -Komponente des Drehimpulses kann Gravitation kein Drehmoment ausüben

- Setze  $p_\varphi = L_z$  in Gl. (33) ein:

$$ml^2 \ddot{\theta} - \frac{L_z^2}{ml^2 \sin^3 \theta} \cos \theta + mgl \sin \theta = 0$$

Multipliziere mit  $\dot{\theta}$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{L_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta \right) = 0$$

- Andererseits Energie

$$E = T + U = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{L_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} + mgl(1 - \cos \theta) \quad (35)$$

Also Energie erhalten.

Ergibt Erstes Integral für  $\theta$ .

Lösung der Bewegungsgleichungen:

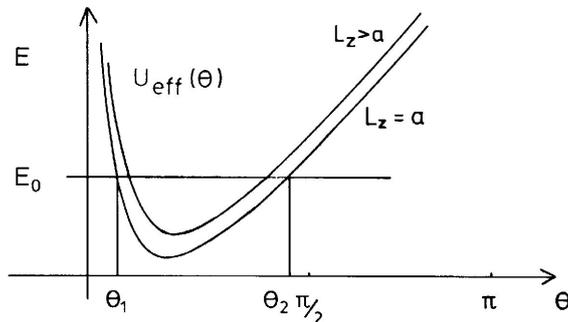
- Déjà vu Zwei-Körper-Problem
- Berechne  $\theta(t)$  aus Gl. (35)
- Berechne  $\varphi(t)$  aus Gl. (34)

Qualitative Diskussion:

- Effektives Potential

$$E = T + U_{eff}, \quad U_{eff}(\theta) = \frac{L_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl(1 - \cos \theta)$$

$\varphi$ -Einfluß über  $L_z$



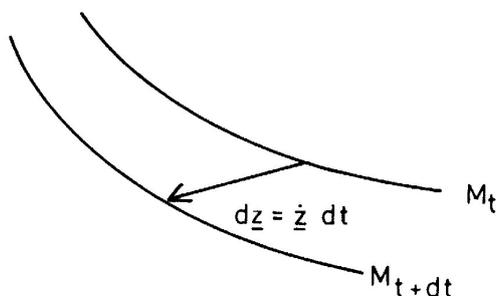
Darstellung von  $U_{eff}(\theta)$  für verschiedene  $L_z$ . Das Minimum liegt bei  $\theta$ -Werten kleiner  $\pi/2$ . Bei vorgegebenem  $E_0$  und  $L_z \neq 0$  kann  $\theta$  zwischen  $\theta_1$  und  $\theta_2$  oszillieren

- $L_z \neq 0$ 
  - $U_{eff}(\theta)$  singularär für  $\theta = 0$  und  $\theta = \pi$
  - Minimum:  $\theta_0 < \pi/2$
  - $\theta$  oszilliert zwischen  $\theta_1$  und  $\theta_2$
  - Minimales  $E$ : Kreisbewegung mit  $\theta = \theta_0$
- Ist  $L_z = 0$ , so  $\dot{\varphi} = 0 \implies$  ebenes Pendel

7. Mi.

## 7.4 Holonom-rheonome Zwangsbedingungen: Die Schaukel

- Erinnere: Skleronome Zwangsbedingungen:  
Wirkliche Verrückungen = Virtuelle Verrückungen = Tangentialvektor an  $M$
- Betrachte rheonome Zwangsbedingungen:  $M_{t+dt} \neq M_t$   
Wirkliche Verrückungen  $\neq$  Virtuelle Verrückungen



Ist  $M_t$  von der Zeit abhängig, so ist die zeitliche Änderung der Ortsvektoren  $d\mathbf{z}$  kein Tangentialvektor an  $M_t$

Zwangskräfte leisten Arbeit

- Annahme zeitunabhängiges Potential

Lagrange-Gleichungen 1. Art:

$$m_i \ddot{r}_i + \nabla_i U(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)) = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha}(t) \nabla_i F_{\alpha}(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t), t)$$

Multiplikation mit  $\dot{r}_i$  und Summe über  $i$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{r}_i^2 + U(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)) \right) = \sum_i \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha}(t) \dot{r}_i \nabla_i F_{\alpha}(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t), t)$$

- Aus

$$F_{\alpha}(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t), t) = 0$$

folgt

$$\frac{d}{dt} F_{\alpha} = \sum_i \dot{r}_i \nabla_i F_{\alpha}(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t), t) + \frac{\partial}{\partial t} F_{\alpha} = 0$$

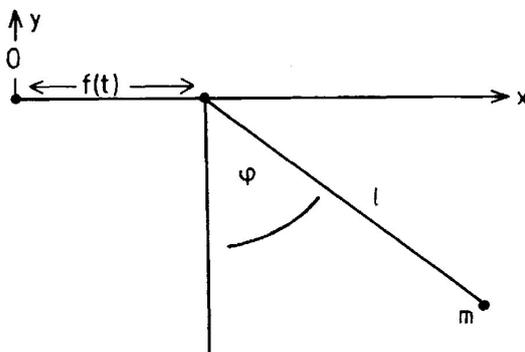
- Somit gilt für Energie:

$$E = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{r}_i^2 + U(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t))$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha}(t) \frac{\partial}{\partial t} F_{\alpha} \quad (36)$$

- Energie sieht genauso aus wie ohne Zwangskräfte.  
Aber Achtung: Nur solche  $r$  und  $\vec{r}$  erlaubt, die von Zwangsbedingungen erlaubt.
- Holonom-skleronom: Energie bleibt erhalten
- Holonom-rheonom: Energie bleibt nicht erhalten

Beispiele:



Das Pendel mit horizontal bewegtem Aufhängepunkt

Ebenes Pendel mit horizontal bewegtem Aufhängepunkt

- Koordinaten:

$$r = (x, y), \quad x = f(t) + l \sin \varphi, \quad y = -l \cos \varphi$$

Zwangsbedingung:

$$F(x, y, t) = (x(t) - f(t))^2 + y^2 - l^2 = 0$$

- Es ist:

$$\dot{x} = \dot{f} + l\dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y} = l\dot{\varphi} \sin \varphi$$

- Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y) \\ &= \frac{1}{2}m[\dot{f}^2 + 2\dot{f}l\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\varphi}^2(l^2 \cos^2 \varphi + l^2 \sin^2 \varphi)] - mgl(1 - \cos \varphi) \end{aligned}$$

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{f}l\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{f}^2) - mgl(1 - \cos \varphi)$$

- Lagrange Gleichung 2. Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\varphi}} - \frac{dL}{d\varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi} + ml\dot{f} \cos \varphi) - (-ml\dot{f} \dot{\varphi} \sin \varphi - mgl \sin \varphi) = 0$$

ergibt:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = -\frac{1}{l} \ddot{f} \cos \varphi$$

- Allgemeine Lösung nur numerisch möglich
- Lagrange Gleichung 1. Art:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 2\lambda(x - f(t)) \\ m\ddot{y} + mg &= \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 2\lambda y \end{aligned} \tag{37}$$

Da Zwangskraft in Richtung Aufhängepunkt:  $\lambda < 0$

- 

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2\dot{f}(f(t) - x(t))$$

Folge mit Gl. (36):

$$\frac{dE}{dt} = -\lambda \frac{\partial F}{\partial t} = -2\lambda \dot{f}(f(t) - x(t))$$

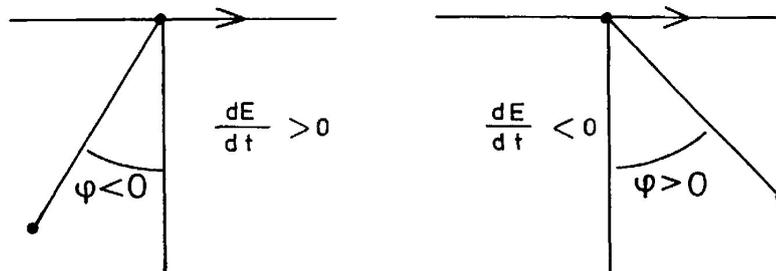
oder auch mit Gl. (37):

$$\frac{dE}{dt} = m\ddot{x}\dot{f}$$

- Betrachte geradlinig-gleichförmige Bewegung des Aufhängepunktes:  $f(t) = vt$ ,  $\dot{f} = v$

für  $-\pi/2 < \varphi < 0$  :  $f(t) - x(t) > 0$ ,  $\ddot{x} > 0$ , also  $dE/dt > 0$

für  $0 < \varphi < \pi/2$  :  $f(t) - x(t) < 0$ ,  $\ddot{x} < 0$ , also  $dE/dt < 0$



Für  $\varphi < 0$  wird dem Pendel bei geradlinig-gleichförmiger Führung des Aufhängepunktes Energie zugeführt, für  $\varphi > 0$  wird sie dem Pendel entzogen

Energieänderung über eine Periode  $T$

$$\int_0^T dt \frac{dE}{dt} = mv \int_0^T dt \ddot{x} = mv(\dot{x}(T) - \dot{x}(0)) = 0$$

- Antizyklische Führung des Aufhängepunktes bringt Pendel zum Schwingen.

Die Schaukel

- Schaukler verlagert Schwerpunkt:
  - "Hinten" nach hinten lehnen
  - Durchgang durch Ruhelage aufrichten
  - Entspricht Veränderung der Fadenlänge

- Zwangsbedingung:  $F = l^2(t) - \vec{r}^2 = 0$

- Zwangskraft:  $\vec{Z} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \vec{r}} = -2\lambda \vec{r}$ ,  $\lambda > 0$

- Andererseits

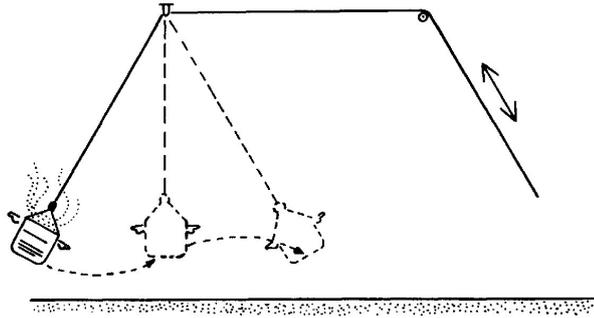
$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2l\dot{l}$$

Mit Gl. (36)

$$\frac{dE}{dt} = -2\lambda(t)l(t)\dot{l}(t), \quad \text{Verkürzung: } \dot{l} < 0 \quad \text{folgt } \frac{dE}{dt} > 0$$

- $\lambda(t)$  ist maximal beim Durchgang durch Ruhelage
- System gewinnt dort mehr Energie, als es beim wieder Verlängern "hinten" wieder verliert.
- Damit :  $E(T) - E(0) > 0$

- Anwendung: Weihrauchfaß von Santiago de Compostella



Das Weihrauchfaß von Santiago de Compostella

Uebung: Jojo

## 7.5 Nicht-holonome Zwangsbedingungen

- Bei holonomen Zwangsbedingungen  $F(r, t) = 0$  sind die erlaubten Lagen global vorgegeben
- Bei nicht-holonomen Zwangsbedingungen  $F(r, \dot{r}, t) = 0$  sind nur mögliche infinitesimale Zustandsänderungen festgelegt. Gesamtheit möglicher Lagen in der Regel größer.

Beispiel: Kugel auf ebener Fläche

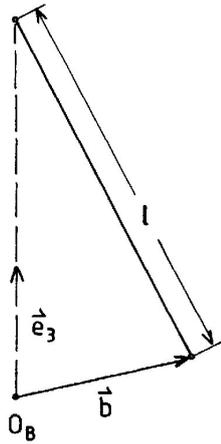
- Konfigurationsraum, i.e. Menge möglicher Lagen:
  - Ort des Kugelmittelpunktes  $\vec{r}_{KM}$
  - Kugelbezogenes Koordinatensystem  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$
- Zwangsbedingung:  
Kleine Drehung  $\dot{\varphi}$  um  $\vec{e}_1$  der Kugel legt Verschiebung des Kugelmittelpunktes  $\vec{r}_{KM}$  fest:

$$F(\vec{r}_{KM}, \dot{\varphi}) = 0$$

- Aber: durch geeignete Bahnen kann jede beliebige Lage erreicht werden.
- Einschränkungen für virtuelle Verrückungen, nicht reale Lagen.

## 7.6 Foucaultsches Pendel

- Betrachte Pendel in erdfestem (Nicht-Inertial) System: Foucaultsches Pendel (Paris, 1851)



Das Foucaultsche Pendel. Der Bezugspunkt  $O_B$  sei in der Ruhelage des Pendels

- Scheinkräfte revisited, Kapitel 5.3

$$\frac{d}{dt}r = \frac{d}{dt'}r + \omega \times r$$

- $\dot{r}^2$ :

$$\dot{r}^2 = v^2 + 2v\omega \times r + (\omega \times r)^2$$

Letzter Term klein: vernachlässigen

- Lagrange Funktion

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + m\mathbf{v}(\omega \times \mathbf{r}) - U(r)$$

mit

$$U(r) = -m\vec{g} \cdot \vec{r}$$

- Mit

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m\omega_x(y\dot{z} - z\dot{y}) + m\omega_y(z\dot{x} - x\dot{z}) + m\omega_z(xy - yx) - mgz$$

- Mit

$$x^2 + y^2 + (z - l)^2 = l^2$$

folgt

$$z = l - l\sqrt{l^2 - x^2 - y^2} = l - l\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2} + \dots\right) = \frac{x^2 + y^2}{2l} + O\left(\frac{x^4}{l^3}\right)$$

- Sehr langes Pendel: vernachlässige Terme

$$\frac{x^4}{l^3}, \quad \dot{z}^2, \quad \omega_x z \dot{y}, \quad \omega_y z \dot{x}, \quad \omega_x \dot{z} y, \quad \omega_y \dot{z} x$$

- Ergibt für Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\omega_z(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{mg}{2l}(x^2 + y^2)$$

- Bewegungsgleichungen für  $x$  &  $y$ :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - m\omega_z\dot{y} &= -m\frac{g}{l}x + m\omega_z\dot{y} \\ m\ddot{y} + m\omega_z\dot{x} &= -m\frac{g}{l}y - m\omega_z\dot{x} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega_z\dot{y} + \frac{g}{l}x &= 0 \\ \ddot{y} + 2\omega_z\dot{x} + \frac{g}{l}y &= 0 \end{aligned}$$

Setze  $u = x + iy$

$$\ddot{u} + 2i\omega_z\dot{u} + \frac{g}{l}u = 0$$

- Erinnere Kapitel 4 Lineare Schwingungen

Exponentialansatz:  $u = e^{i\nu t}$

- Ergibt:

$$-\nu^2 - 2\omega_z\nu + \frac{g}{l} = 0$$

oder

$$\nu = -\omega_z \pm \sqrt{\omega_z^2 + \frac{g}{l}}$$

- Da  $\omega_z^2 \ll \frac{g}{l}$

$$\nu = -\omega_z \pm \sqrt{\omega_z^2 + \frac{g}{l}} = -\omega_z \pm \hat{\omega}, \quad \hat{\omega} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

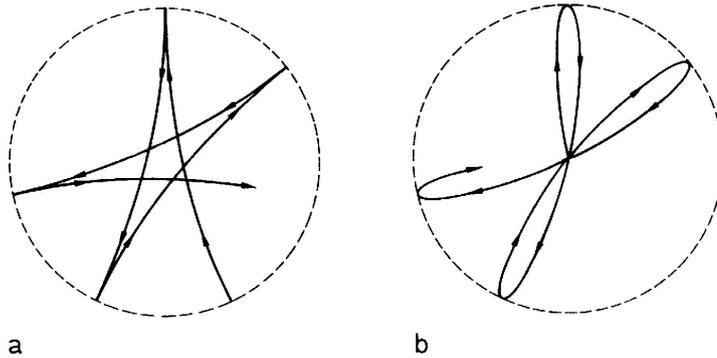
also:

$$u(t) = e^{-i\omega_z t}(c_1 e^{i\hat{\omega} t} + c_2 e^{-i\hat{\omega} t})$$

$c_1, c_2$  aus Anfangsbedingungen

Interpretation:

- Für  $\omega_z = 0$ , ergäbe das einfache, ebene Schwingung
- Mit  $\omega_z \neq 0$  dreht sich Schwingungsebene
- Ablenkung auf Nordhalbkugel immer nach rechts



Die Bahnen des Foucaultschen Pendels (schematisch).  
 Das Pendel wird auf der Nordhalbkugel durch die Corioliskraft stets nach rechts abgelenkt. **(a)** Form der Bahnen, wenn das Pendel zur Zeit  $t = t_0$  ruht und aus dem oberen Totpunkt losgelassen wird. **(b)** Form der Bahnen, wenn das Pendel zur Zeit  $t = t_0$  aus der Ruhelage heraus angestoßen wird

- Stärke des Effekts:  $\omega_z = \vec{\omega} \vec{e}_3 = |\omega| \sin$  (geographische Breite)  
 $T = 1 \text{ Tag} / \sin$  (geographische Breite)
  - Nordpol: Eine Drehung pro Tag
  - Äquator: Kein Effekt
  - Freiburg: Eine Drehung in 1.3 Tagen
  - Mythos: Badewanne am Äquator

Lessons learnt:

- Lagrange 2. Art erleichtert das Leben gegenüber 1. Art
- Rheonome Zwangsbedingungen können Arbeit verrichten
- Foucaultsches Pendel (Paris, 1851) weist Erddrehung explizit nach

8. Mo.

## 8 8. Woche: Lagrangesche Mechanik: Der starre Körper I

- Bisher: Mechanik von Massenpunkten
- Nicht angemessen, wenn Ausdehnung relevante Rolle spielt.
- Beispiel: Rollendes Rad
- (Weniger) idealisiertes System: Der starre Körper
- Starre Körper: Holonom-skleronome Zwangsbedingungen:

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| - C_{ij} = 0$$

ZEICHNUNG dazu

## 8.1 Kinematik

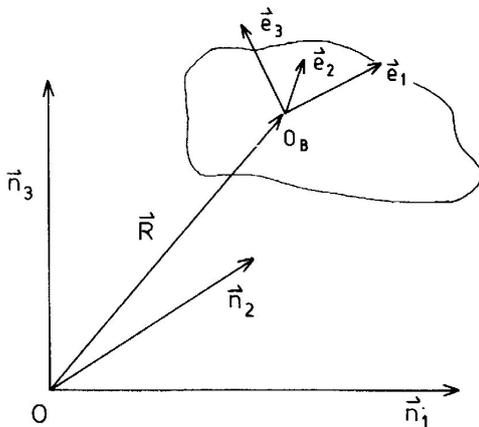
Konfigurationsraum:

- Körperfestes Koordinatensystem
  - Wähle Punkt  $O_B$  im Körper, kluger Punkt: Schwerpunkt, Kreisel: Fußpunkt
  - Verankere dort rechtshändiges orthonormales Koordinatensystem  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$
  - Punkt  $X$  des Körpers:

$$O_B \vec{X} = \vec{b} = \sum_i b_i \vec{e}_i$$

- $\dot{b}_i = 0$  wegen Starrheit des Körpers

- Inertialsystem
  - Ursprung  $O$
  - rechtshändiges orthonormales Koordinatensystem  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$
  - Sei  $\vec{R} = O\vec{O}_B$



Raumfestes Inertialsystem und körperfestes System mit den Basisvektoren  $e_1, e_2, e_3$

Damit

$$O\vec{X} =: \vec{r}(t) = \vec{R} + \sum_i b_i \vec{e}_i(t)$$

Drücke  $\vec{e}_i(t)$  durch  $\vec{n}_i$  aus ( $\vec{R} = 0$ )

$$\vec{e}_i(t) = \sum_j \vec{n}_j D_{ji}(t)$$

Somit

$$\vec{b}(t) = \sum_i b_i \vec{e}_i(t) = \sum_{ij} \vec{n}_j D_{ji}(t) b_i$$

Lage des starren Körpers gegeben durch:

- Ortsvektor  $\vec{R}(t)$
- Drehung  $D(t)$ , die  $\vec{n}_i$  in  $\vec{e}_i(t)$  überführt

Eigenschaften von Drehmatrizen

- $DD^T = D^T D = 1$ ,  $D^{-1} = D^T$
- $\det D = 1$ : Volumenerhaltend

Parametrisierung der Drehung, die  $\vec{n}_i$  in  $\vec{e}_i(t)$  überführt.

- (i) Drehung um  $\vec{n}_3$  um Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi)$

Zugehörige Drehmatrix  $R_{ji}^3$

$$n'_i = \sum_j n_j R_{ji}^3(\varphi)$$

$$\begin{aligned} n'_1 &= \cos \varphi n_1 + \sin \varphi n_2 \\ n'_2 &= -\sin \varphi n_1 + \cos \varphi n_2 \\ n'_3 &= n_3 \end{aligned}$$

Ergo:

$$R^3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Check:  $R^3 R^{3T} = 1$ ,  $\det R^3 = 1$

- (ii) Drehung um  $\vec{n}'_1$  um Winkel  $\theta \in (0, \pi)$

Zugehörige Drehmatrix  $R_{ji}^1$

$$n''_i = \sum_j n'_j R_{ji}^1(\theta)$$

$$\begin{aligned} n''_1 &= n_1 \\ n''_2 &= \cos \theta n'_2 + \sin \theta n'_3 \\ n''_3 &= -\sin \theta n'_2 + \cos \theta n'_3 \end{aligned}$$
$$R^1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

(iii) Drehung um  $\vec{n}_3''$  um Winkel  $\psi \in (0, 2\pi)$  mit  $R^3(\psi)$

Damit final

$$\begin{aligned} e_1 &= \cos \psi n_1'' + \sin \psi n_2'' \\ e_2 &= -\sin \psi n_1'' + \cos \psi n_2'' \\ e_3 &= n_3'' \end{aligned}$$

Zusammengefaßt:

$$e_i = \sum_{rkj} n_r R_{rk}^3(\varphi) R_{kj}^1(\theta) R_{ji}^3(\psi) = \sum_r n_r D_{ri}(\varphi, \theta, \psi)$$

Diese Winkel  $\varphi, \theta, \psi$ , die jede Drehung parametrisieren, heißen Eulersche Winkel

Freiburg Euler Winkel Demonstrations Apparat (FREUWDA)

- Natürlich alles zeitabhängig

$$\vec{e}_i(t) = \sum_r \vec{n}_r D_{ri}(\varphi(t), \theta(t), \psi(t))$$

- Geschwindigkeit

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{R}}(t) + \sum_i b_i \dot{\vec{e}}_i(t) = \dot{\vec{R}}(t) + \sum_{ij} n_j \dot{D}_{ji}(t) b_i$$

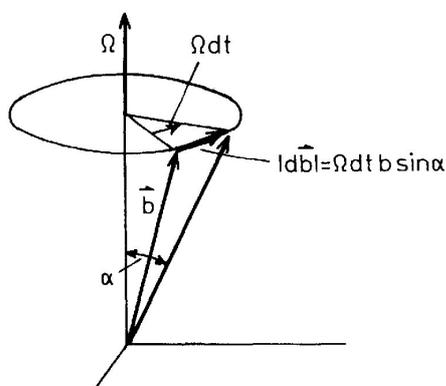
- Zentral:

Es existiert Winkelgeschwindigkeitsvektor  $\vec{\Omega}(t)$ , so daß gilt

$$\dot{\vec{e}}_i(t) = \vec{\Omega}(t) \times \vec{e}_i(t)$$

Interpretation:

- $\vec{\Omega}$  gibt Richtung der Drehachse an
- $|\vec{\Omega}|$  die Geschwindigkeit



Der Vektor  $\Omega$  gibt die Richtung der Achse an, um die sich der Punkt  $b$  momentan dreht und  $|\Omega|$  gibt die Winkelgeschwindigkeit der Drehung an

In Eulerschen Winkeln ausgedrückt:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \\ \Omega_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \\ \Omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta\end{aligned}$$

Beweis als Übung

Der Konfigurationsraum

- Die Menge aller eigentlichen Drehungen bildet eine Gruppe, die mit  $SO(3)$  bezeichnet wird  
 $SO(3)$ : Speziell orthogonal im 3-dimensionalen.  
 "Unspeziell" wäre mit Spiegelungen, heißt  $O(3)$
- Der Konfigurationsraum  $M$  eines starren Körpers ist somit

$$M = SO(3) \times R^3$$

## 8.2 Kinetische Energie & Trägheitstensoren

Geschwindigkeit für Punkt  $i$  des Körpers

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}} + \sum_j b_{ij} \dot{\vec{e}}_j = \dot{\vec{R}} + \sum_j b_{ij} (\vec{\Omega} \times \vec{e}_j) = \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{b}_i$$

Damit kinetische Energie:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{r}}_i^2 &= \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{b}_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{R}}^2 + \sum_i m_i \dot{\vec{R}} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{b}_i) + \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{\Omega} \times \vec{b}_i)^2\end{aligned}$$

Mit

$$M = \sum_i m_i,$$

$$\dot{\vec{R}} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{b}_i) = (\dot{\vec{R}} \times \vec{\Omega}) \cdot \vec{b}_i$$

und

$$(\vec{\Omega} \times \vec{b}_i)^2 = \vec{\Omega}^2 \vec{b}_i^2 \sin^2 \alpha = \vec{\Omega}^2 \vec{b}_i^2 (1 - \cos^2 \alpha) = \vec{\Omega}^2 \vec{b}_i^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{b}_i)^2$$

folgt

$$\frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + (\dot{\vec{R}} \times \vec{\Omega}) \cdot \sum_i m_i \vec{b}_i + \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{\Omega}^2 \vec{b}_i^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{b}_i)^2)$$

1. Term

- Schwerpunktsbewegung

2. Term verschwindet, wenn

- $O_B$  im Schwerpunkt, wegen  $\sum_i m_i \vec{b}_i = 0$

oder

- Körper in  $O_B$  fixiert, da  $\vec{R} = 0$ . z.B. Fußpunkt Kreisel

3. Term

- Mit Trägheitstensor  $I_{mn}$

$$I_{mn} = \sum_i m_i (\delta_{mn} \vec{b}_i^2 - b_{i_m} b_{i_n})$$

gilt

$$\frac{1}{2} \sum m_i (\vec{\Omega}^2 \vec{b}_i^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{b}_i)^2) = \frac{1}{2} \sum_{mn} \Omega_m I_{mn} \Omega_n$$

Argument:

$$\vec{\Omega}^2 \vec{b}^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{b})^2 = \sum_n \Omega_n^2 \vec{b}^2 - \sum_{mn} \Omega_m b_m \Omega_n b_n = \sum_{mn} (\delta_{mn} \vec{b}^2 - b_m b_n) \Omega_m \Omega_n$$

Damit folgt für kinetische Energie,  $O_B$  im Schwerpunkt:

$$\begin{aligned} T &= T_S + T_{rot} \\ T_S &= \frac{1}{2} M \dot{R}^2 \\ T_{rot} &= \frac{1}{2} \Omega_m I_{mn} \Omega_n \end{aligned}$$

Bei kontinuierlicher Massenverteilung mit Dichte  $\rho(\vec{b})$ :

$$I_{mn} = \int_V d^3b \rho(\vec{b}) (\delta_{mn} \vec{b}^2 - b_m b_n)$$

Etwas abstrakter:

- In

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \Omega_m I_{mn} \Omega_n$$

ist  $I_{mn}$  eine Bilinearform:  $V^3 \times V^3 \mapsto R$

- Operator:  $I(\vec{\Omega}, \vec{\Omega})$

- Damit

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I(\vec{\Omega}, \vec{\Omega})$$

Bemerkungen

- (i) Erfolgt Drehung um feste Achse in Richtung Einheitsvektor  $\vec{n}$ , so ist

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{n}$$

und damit

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \Omega^2 n_i I_{ij} n_j = \frac{1}{2} I_{\vec{n}} \Omega^2$$

$I_{\vec{n}}$ : Trägheitsmoment des starren Körpers bezüglich Achse  $\vec{n}$ .

Trägheitstensor bestimmt also die Trägheitsmomente für alle möglichen Achsen durch  $O_b$

(ii) Komponenten von  $I_{nm}$

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_i m_i (b_{i2}^2 + b_{i3}^2) \\ I_{22} &= \sum_i m_i (b_{i1}^2 + b_{i3}^2) \\ I_{33} &= \sum_i m_i (b_{i1}^2 + b_{i2}^2) \\ I_{jk} &= - \sum_i m_i b_{ij} b_{ik}, \quad \text{für } j \neq k \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} I_{11} + I_{22} &\geq I_{33} \\ I_{22} + I_{33} &\geq I_{11} \\ I_{11} + I_{33} &\geq I_{22} \end{aligned}$$

Gleichheit am Beispiel

$$I_{11} + I_{22} \geq I_{33}$$

wenn  $\sum_i m_i b_{i3}^2 = 0$ , i.e.  $b_{i3} = 0 \forall i$ , also alle Masse in 1 – 2-Ebene liegt.

8. Mi.

(iii) Diagonalisierung:

– Lineare Algebra: Jede symmetrische, positiv semi-definite Bilinearform (Matrix) kann durch orthogonale Transformation diagonalisiert werden.

– Konkret:

Es existiert orthonormale Basis  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  so dass

$$\begin{aligned} I(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j) &= 0, \quad \text{für } i \neq j \\ I(\vec{e}'_i, \vec{e}'_i) &\geq 0 \end{aligned}$$

Vektoren  $\vec{e}'_i$  heißen Hauptträgheitsachsen

– Geschick: Identifiziere körperfeste Basis mit Hauptträgheitsachsen.

Dann

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

– In der Regel: Symmetrie des Körpers legt Hauptträgheitsachsen fest.

\* Wenn Körper symmetrisch unter Spiegelung an Ebene mit Normalenvektor  $\vec{n}$ , so ist  $\vec{n}$  eine Hauptträgheitsachse und die anderen liegen in Ebene.

- \* Wenn Körper symmetrisch unter Drehungen um Achse  $\vec{n}'$ , so ist  $\vec{n}'$  Hauptträgheitsachse und die beiden anderen Hauptträgheitsmomente sind gleich.

(iv) Trägheitsellipsoid

- Die Menge

$$\mathcal{E} = \{\vec{\xi} | I(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = 1\}$$

ist Menge aller Winkelgeschwindigkeiten zu fester Rotationsenergie.

- Wähle Hauptträgheitsachsen als Basisvektoren
- Dann

$$\mathcal{E} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3 | I_1 \xi_1^2 + I_2 \xi_2^2 + I_3 \xi_3^2 = 1\}$$

ein Ellipsoid mit Hauptachsen in Richtung der Hauptträgheitsachsen und den Längen:

$$\frac{1}{\sqrt{I_1}}, \frac{1}{\sqrt{I_2}}, \frac{1}{\sqrt{I_3}}$$

- Heißt Trägheitsellipsoid.
- Sind zwei Hauptträgheitsmomente, say  $I_1$  und  $I_2$ , gleich: Rotationsellipsoid.  
Dann ist jede Achse senkrecht zu  $\vec{e}_3$  Hauptträgheitsachse
- Falls  $I_1 = I_2 = I_3$ , Trägheitsellipsoid eine Kugel, jede Achse ist Hauptträgheitsachse

(v) Der Steinersche Satz

Trägheitstensor bezüglich Koordinatensystem, dessen Ursprung nicht im Schwerpunkt liegt.

- Schwerpunkt:  $O_B$ , Neuer Ursprung:  $O'_B$ ,  $O_B \vec{O}'_B = \vec{a}$ ,  $\vec{b} = \vec{b}' + \vec{a}$
- Trägheitstensor im neuen System

$$\begin{aligned} I'_{mn} &= \sum_i m_i (\delta_{mn} \vec{b}'_i{}^2 - b'_{im} b'_{in}) \\ &= \sum_i m_i [\delta_{nm} (\vec{b}_i - \vec{a})^2 - (b_{im} - a_m)(b_{in} - a_n)] \\ &= I_{mn} + M(\delta_{mn} \vec{a}^2 - a_m a_n) - 2\delta_{mn} \sum_i m_i \vec{b}_i \cdot \vec{a} + a_m \sum_i m_i b_{in} + a_n \sum_i m_i b_{im} \end{aligned}$$

mit  $M = \sum_i m_i$

Da  $O_B$  Schwerpunkt, verschwinden mit  $\sum_i m_i \vec{b}_i = \sum_i m_i \vec{b}_{i_m/n} = 0$  die gemischten Terme

- Folgt der Steinersche Satz:

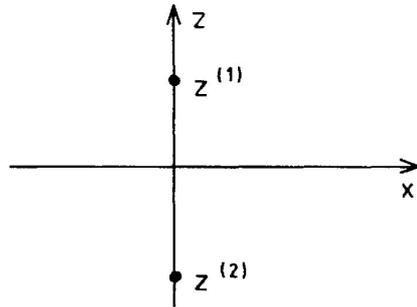
Ist  $I_{mn}$  Trägheitstensor im körperfesten System bezüglich Schwerpunkt, so ergibt sich Trägheitstensor bezüglich  $O'_B$  nach

$$I'_{mn} = I_{mn} + M(\delta_{mn} a^2 - a_m a_n)$$

Beachte: Zusatzterm ist Trägheitstensor eines Massepunktes im Punkte  $\vec{a}$

## Berechnung von Trägheitstensoren

- Molekül mit zwei Atomen in  $z$ -Richtung



Die Lage der  
Atome eines zwei-  
atomigen Moleküls im  
körperfesten System

Schwerpunkt:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{b}_1 + m_2 \vec{b}_2}{m_1 + m_2} = 0, \quad \vec{b}_i = (0, 0, z_i)$$

Dann mit  $z_1 - z_2 = l$ ,  $M = m_1 + m_2$ :

$$z_1 = \frac{lm_2}{M}, \quad z_2 = -\frac{lm_1}{M},$$

Folgt

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_i m_i b_{i3}^2 = m_1 \frac{l^2 m_2^2}{M^2} + m_2 \frac{l^2 m_1^2}{M^2} = \frac{l^2 m_1 m_2}{M} = l^2 \mu \\ I_{22} &= I_{11} \\ I_{33} &= \sum_i m_i (\vec{b}_i^2 \delta_{33} - b_{i3}^2) = 0 \\ I_{mn} &= 0 \text{ für } n \neq m \end{aligned}$$

$I_{33} = 0$ , da Massenverteilung ganz in  $z$ -Richtung liegt

- Trägheitstensor homogene Kugel, Dichte  $\rho$ , Radius  $R$

Erinnere

$$\begin{aligned} I_{mn} &= \int_V d^3b \rho(\vec{b}) (\delta_{mn} \vec{b}^2 - b_m b_n) \\ I_{11} &= \sum_i m_i (b_{i2}^2 + b_{i3}^2) = \int_V d^3b \rho(\vec{b}) (b_2^2 + b_3^2) \end{aligned}$$

Für Kugel: Kugelkoordinaten  $d^3b = dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$

$$\begin{aligned} I_{11} + I_{22} + I_{33} &= 3I_1 \\ &= \int_r \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \rho (2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2) \\ &= 4\pi \rho \int_0^R dr r^2 (2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2) \\ &= 8\pi \rho \int_0^R dr r^4 = \frac{8\pi}{5} \rho R^5 \end{aligned}$$

Also mit Kugelmasse  $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{8\pi}{15}\rho R^5 = \frac{2}{5}MR^2$$

Uebung: Trägheitstensoren ausrechnen

### 8.3 Drehimpuls, Eulersche Kreiselgleichungen, freier symmetrischer Kreisel

- Betrachte Drehimpuls bezüglich körperfestem Bezugspunkt  $O_B$

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i \vec{b}_i \times m_i \dot{\vec{b}}_i = \sum_i m_i \vec{b}_i \times (\vec{\Omega} \times \vec{b}_i) \\ &= \sum_i m_i [\vec{\Omega} \vec{b}_i^2 - \vec{b}_i (\vec{\Omega} \cdot \vec{b}_i)] \\ &= \sum_{jk} \vec{e}_j(t) I_{jk} \Omega_k(t) = \sum_j L_j(t) \vec{e}_j(t)\end{aligned}$$

Ergo:

$$L_j = \sum_k I_{jk} \Omega_k \quad \text{oder} \quad \vec{L} = \underline{I} \vec{\Omega}$$

- Drehimpuls  $\vec{L}$  ist lineare Funktion der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\Omega}$
- Wenn körperfeste Basis  $\vec{e}_i$  gleich Hauptträgheitsachsen:

$$L_i = I_i \Omega_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{keine Summation}$$

- Bewegungsgleichungen:

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F} \ddot{\text{ä}}\text{u}, \quad \dot{\vec{L}} = \vec{N} \ddot{\text{ä}}\text{u}$$

Gelten, wenn sich innere Kräfte herausheben. Ist der Fall, da innere Kräfte Zwangskräfte.

- Mit  $\vec{L} = \sum_{ik} I_{ik} \Omega_k(t) \vec{e}_i(t)$  und  $\vec{N} = \sum_i N_i \vec{e}_i(t)$  folgt

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}}(t) &= \sum_{ik} I_{ik} \dot{\Omega}_k(t) \vec{e}_i(t) + \sum_{ik} I_{ik} \Omega_k(t) \dot{\vec{e}}_i(t) \\ &= \sum_{ik} I_{ik} \dot{\Omega}_k(t) \vec{e}_i(t) + \sum_{ik} I_{ik} \Omega_k(t) (\vec{\Omega} \times \vec{e}_i(t)) = \sum_i N_i \vec{e}_i(t)\end{aligned}$$

Multipliziere mit  $\vec{e}_j(t)$

$$N_j = \sum_k I_{jk} \dot{\Omega}_k(t) + \sum_{km} I_{ik} \Omega_k \Omega_m \epsilon_{mij}$$

- Ist  $I_{jk}$  diagonal, folgen die

Eulerschen Kreiselgleichungen für  $\Omega_i(t)$  :

$$\begin{aligned}N_1 &= I_1 \dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2) \Omega_3 \Omega_2 \\ N_2 &= I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3) \Omega_1 \Omega_3 \\ N_3 &= I_3 \dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1) \Omega_2 \Omega_1\end{aligned}$$

- Drückt man  $\Omega_i$  durch Eulersche Winkel aus

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \\ \Omega_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \\ \Omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta\end{aligned}$$

so erhält man Bewegungsgleichungen für Eulerwinkel

Bemerkungen

- Newtonsche Tradition
- Generisch nichtlinear, im allgemeinen schwer zu lösen.
  - $N_i$  ist bezogen auf das körperfeste System.  
Daher zeitabhängig in Abhängigkeit der Bewegung.
- Selbst kräftefreier Fall  $\vec{P} = 0, \vec{L} = 0$  kompliziert

Alternativer Ansatz für kräftefreien Fall (bei Zeitnot 1. Teil weglassen):

- Multipliziere freie Euler-Gleichungen mit  $\Omega_i$  und summiere über  $i$ , folgt:

$$\sum_i I_i \dot{\Omega}_i \Omega_i = 0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_i I_i \Omega_i^2 \right) = \dot{T}_{rot}$$

Wie erwartet ist Rotationsenergie erhaltene Größe.

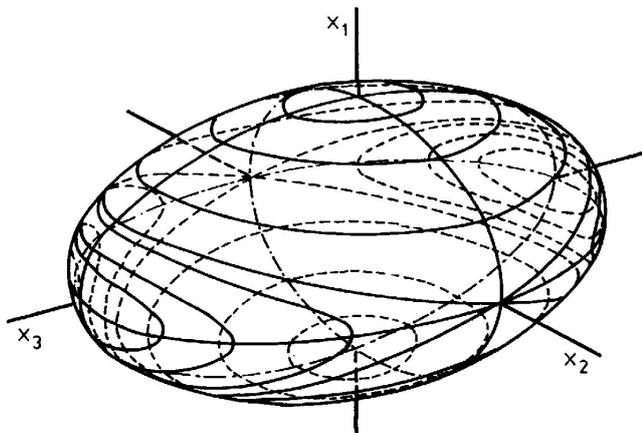
- Ferner gilt wegen  $\dot{\vec{L}} = 0$  auch

$$\frac{d}{dt} \vec{L}^2 = 2\vec{L}\dot{\vec{L}} = 0$$

- Im körperfesten System in Komponenten ausgedrückt:

$$\begin{aligned}\vec{L}^2 &= L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 && \text{Kugel mit Radius } L \\ T_{rot} &= \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3} && \text{Ellipsoid, Achsen:Hauptträg.-sachsen, Länge } a_i = (2I_i T_{rot})^{1/2}\end{aligned}$$

$\vec{L}(t)$  muß sich entlang Schnittlinien von Kugel und Ellipsoid bewegen.



Die Schnittlinien von Kugel und Ellipsoid

Bewegung um Achsen des größten und kleinsten Trägheitsmomentes stabil, um mittleres Trägheitsmoment instabil.

Beweis als Übung ?

Im raumfesten System:

- $\vec{L}$  zeigt in Richtung der Normalen an Trägheitsellipsoid im Punkte  $\vec{\xi} = \vec{\Omega}/(2T_{rot}^{1/2})$ .

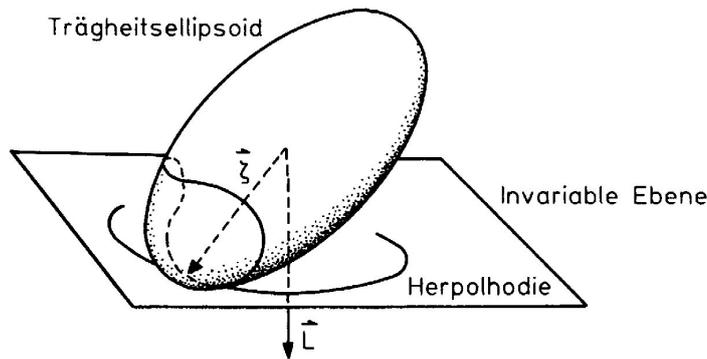
Beweis: Normale an die Fläche, die durch

$$F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = I_1\xi_1^2 + I_2\xi_2^2 + I_3\xi_3^2 - 1 = 0$$

gegeben, ist

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \frac{\partial F}{\partial \xi_2}, \frac{\partial F}{\partial \xi_3} \right) = 2(I_1\xi_1, I_2\xi_2, I_3\xi_3) \propto \vec{L}$$

- Trägheitsellipsoid bewegt sich also so, dass Normale in Punkt  $\vec{\xi}$  senkrecht auf Ebene steht.



**Zur Poinsotschen Beschreibung der Bewegung eines kräftefreien Kreisels**

- Abstand  $h$  des Mittelpunktes des Trägheitsellipsoid von Ebene ist konstant

$$h = \vec{\xi} \cdot \frac{\vec{L}}{L} = \frac{\vec{\Omega} \cdot \vec{L}}{L\sqrt{2T_{rot}}} = \frac{\sqrt{2T_{rot}}}{L}, \quad \text{da } \vec{\Omega} \cdot \vec{L} = \vec{\Omega} \cdot I \vec{\Omega} = 2T_{rot}$$

- Zusammengefaßt:

Trägheitsellipsoid rollt ohne zu Gleiten mit konstantem Mittelpunkt auf fester Ebene mit Normalenrichtung  $\vec{L}$ . Hauptträgheitsachsen und  $\vec{\Omega}$  kreisen um  $\vec{L}$ .

Spezialfall: Freier symmetrischer Kreisel

- Sei  $I_1 = I_2$ , 3-Achse heißt Figurenachse
- FOLIE Abb 4.3.3
- $\vec{\Omega}$  und  $\vec{e}_3$  laufen auf Kreiskegeln um Achse  $\vec{L}$
- Heißt reguläre Präzession

- Eulersche Kreiselgleichungen:

$$\dot{\Omega}_1 + A\Omega_2 = 0, \quad \dot{\Omega}_2 - A\Omega_1 = 0 \quad \dot{\Omega}_3 = 0, \quad \text{mit } A = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\Omega_3$$

Es folgt

$$\frac{d}{dt}\vec{\Omega}^2 = \frac{d}{dt}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) = -2\Omega_1 A\Omega_2 + 2\Omega_2 A\Omega_1 = 0$$

und

$$\begin{aligned} \ddot{\Omega}_1 + A\dot{\Omega}_2 &= 0 \\ \ddot{\Omega}_2 - A\dot{\Omega}_1 &= 0 \\ \ddot{\Omega}_1 - A^2\Omega_1 &= 0 \end{aligned}$$

Ergibt:

$$\Omega_1 = B \cos At, \quad \Omega_2 = B \sin At$$

Ergo:

$\vec{\Omega}$  läuft im körperfesten System auf Kreismantel um  $\vec{e}_3$  mit Winkelgeschwindigkeit  $A$

- $\vec{L}$ ,  $\vec{e}_3$  und  $\vec{\Omega}$  liegen stets in einer Ebene  
Ebene wird aufgespannt durch  $\vec{e}_3$  und

$$\vec{\Omega}_\perp = \Omega_1\vec{e}_1 + \Omega_2\vec{e}_2$$

Beweis:

$$\vec{L} = I_1(\Omega_1\vec{e}_1 + \Omega_2\vec{e}_2) + I_3\Omega_2\vec{e}_3 = I_1\vec{\Omega}_\perp + I_3\Omega_2\vec{e}_3$$

Praktische Auswirkungen

- statische Unwucht: Schwerpunkt nicht auf Drehachse
- dynamische Unwucht: Drehung nicht um Hauptträgheitsachse

Lessons learnt:

- Eulersche Winkel sind natürliche Parametrisierung der Drehungen
- Trägheitstensor ist diagonalisierbar, definiert Hauptträgheitsachsen
- Eulerschen Kreiselgleichungen für  $\vec{\Omega}$
- Beim freien symmetrischen Kreisel präzedieren Drehachse  $\vec{\Omega}$  und Figurenachse gleichförmig um  $\vec{L}$

9. Mo.

## 9 9. Woche: Lagrangesche Mechanik: Der starre Körper II

Zusammenfassung Eulersche Kreiselgleichung, i.e. Newtonscher Ansatz:

- Eulersche Kreiselgleichung benötigt Kenntnis der Komponenten des Drehmomentes im körperfesten System.
- In der Regel schwer zu berechnen.
- Eigentlich zusätzlich zu  $\vec{\Omega}$  Lagekoordinaten  $\varphi(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\psi(t)$  von Interesse

### 9.1 Bewegungsgleichungen für Eulersche Winkel

Aus kinetischer Energie

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\Omega_i I_{ij} \Omega_j$$

und Abhängigkeit der  $\Omega_i$  von Eulerwinkeln:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \\ \Omega_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \\ \Omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta\end{aligned}$$

folgt sofort

Lagrangefunktion für Euler-Winkel im körperfesten Hauptachsensystem

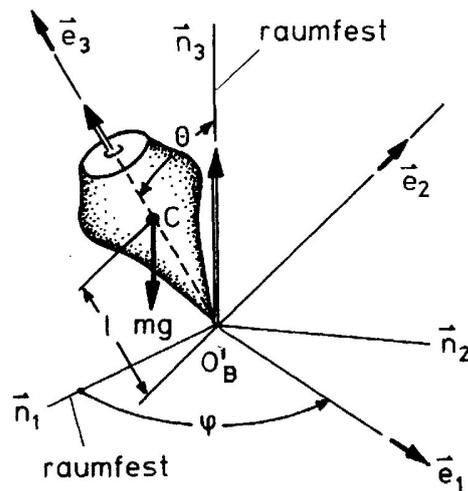
$$\begin{aligned}L &= L(\vec{R}, \dot{\vec{R}}, \varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) = T - U \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi)^2 + \\ &\quad \frac{1}{2}I_2(-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi)^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - U(\vec{R}, \varphi, \theta, \psi)\end{aligned}$$

### 9.2 Der schwere Kreisel

Herrn Wentsch wegen Kreisel kontaktieren

Schwerer Kreisel:

- Symmetrischer Kreisel im Schwerfeld der Erde
- $I_1 = I_2$ ,  $\vec{e}_3$  Figurenachse
- Ursprung  $O'_B$  im körperfesten System: Spitze des Kreisels, fest im raumfesten



Der schwere symmetrische Kreisel

System

Bewegungsgleichung

- Für kinetische Energie folgt:

$$T = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2$$

- Gravitationskraft:  $\vec{F}_i = m_i \vec{g}$

Potential:

$$U = - \sum m_i \vec{g} \vec{b}_i = -\vec{g} \sum_i m_i \vec{b}_i = -M \vec{g} \vec{R}$$

Winkel  $(\vec{n}_3, \vec{e}_3) = \theta$

Damit

$$U = Mgl \cos \theta, \quad l = |\vec{R}|$$

- Lagrange-Funktion:

$$L(\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}) = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta, \quad l = |\vec{R}|$$

- Lagrangefunktion hängt nicht von  $\varphi$  und  $\psi$  ab  $\implies \varphi$  und  $\psi$  sind zyklische Koordinaten.

Erhaltene Größen:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta$$

Verweis auf Noether:

- $p_\psi$  Komponente von  $\vec{L}$  in  $\vec{e}_3$  Richtung
- $p_\varphi$  Komponente von  $\vec{L}$  in  $\vec{n}_3$  Richtung

– Übung bei Noether

Erhaltene Größen ergeben Erste Integrale:

Setze  $p_\psi$  in  $p_\varphi$  ein:

$$p_\varphi = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + p_\psi \cos \theta$$

ergibt

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (38)$$

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} - \dot{\varphi} \cos \theta \quad (39)$$

- Energie  $E = T + U$  ist erhaltene Grösse, da Lagrangefunktion nicht explizit zeitabhängig.

$$E = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + Mgl \cos \theta$$

Ersetze  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\psi}$  aus Gln. (38, 39)

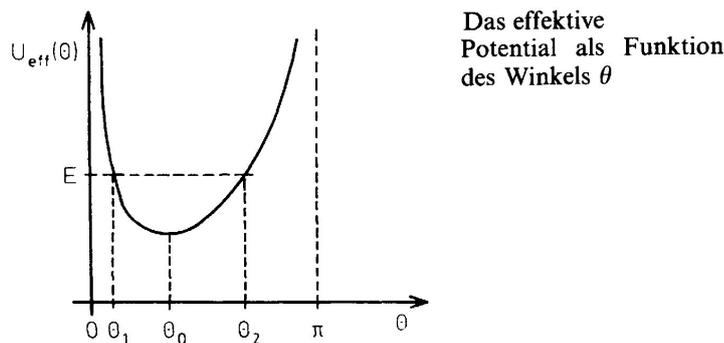
$$E = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + Mgl \cos \theta$$

oder

$$E = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta) \quad (40)$$

mit

$$U_{eff}(\theta) = \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + Mgl \cos \theta$$



Déjà vu: Wieder ein ein-dimensionales Problem, erinnere Zwei-Körper Problem

- Vorgehen
  - Bestimme  $\theta(t)$  aus Gl. (40)
  - Bestimme  $\varphi(t)$  aus Gl. (38)
  - Bestimme  $\psi(t)$  aus Gl. (39)

Exakte Berechnung möglich, aber kompliziert, darum

Qualitative Diskussion

- Neigungswinkel  $\theta$  oszilliert zwischen  $\theta_1$  und  $\theta_2$
- Drehmoment

$$N = \sum_i \vec{b} \times m_i \vec{g} = -Mgl \vec{e}_3 \times \vec{n}_3, \quad \dot{\vec{L}} = N \quad (41)$$

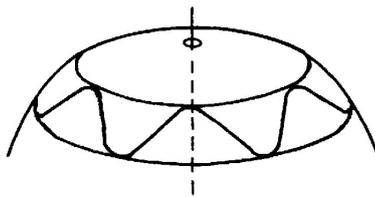
Anschauung:

- Gravitation will Kreisel nach unten ziehen
- Aber Drehmoment wirkt in Richtung  $\vec{r} \times \vec{F} \propto \vec{e}_3 \times \vec{n}_3$

Ergibt Bewegung der Figurenachse um  $\vec{n}_3$

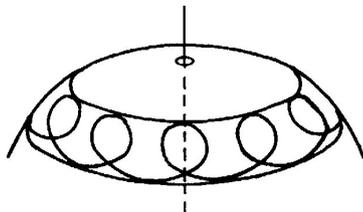
- 3 Möglichkeiten:

a)

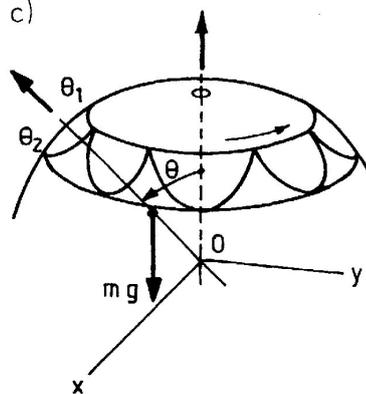


**Die Präzession  
des schweren symmetrischen  
Kreisel mit überlagerter Nu-  
tation**

b)



c)



- Drei Beiträge der Kreisel-Bewegung:

- Präzessionsbewegung<sup>3</sup> von  $\vec{L}$  um Vertikale, auf Grund Gl. (41), beschrieben durch  $\varphi(t)$
- Nutationsbewegung<sup>4</sup> der Figurenachse  $\vec{e}_3$ , beschrieben durch  $\theta(t)$
- Rotation des Kreisel, beschrieben durch  $\psi(t)$

<sup>3</sup>praecedere: vorrücken

<sup>4</sup>nutare: nicken

- Ob in Abb. 4.4.3 a, b, oder c vorliegt, hängt davon ab, ob sich Vorzeichen von

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$$

während Bewegung ändert. Hängt von  $p_\psi$ ,  $p_\varphi$  und  $E$  ab.

(c) ist Grenzfall zwischen (a) und (b)

- Entspricht  $E$  dem Minimum  $\theta_0$  von  $U_{eff}(\theta)$ , folgt:
  - $\theta(t) = \theta_0 = const$
  - Mit Gln. (38,38):  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\psi}$  konstant
  - Reguläre Präzession wie beim freien symmetrischen Kreisel

### 9.3 Zwei Beispiele

(o) Freier symmetrischer Kreisel als Uebung

(i) Schlafender Kreisel

- Stabilität der Rotation um  $\vec{n}_3$ , i.e.  $\theta = 0$
- $\theta = 0$  bedeutet  $p_\psi = p_\varphi = L$
- Für  $\theta \ll 1$  gilt

$$\begin{aligned} U_{eff}(\theta) &= \frac{L^2(1 - \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta + const \\ &= \frac{I_3^2 \Omega^2 \theta^2}{2I_1} - Mgl \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^3) + const = \left( \frac{I_3^2 \Omega^2}{8I_1} - \frac{Mgl}{2} \right) \theta^2 \end{aligned}$$

Bedingung für Minimum bei  $\theta = 0$ :

$$\frac{I_3^2 \Omega^2}{4I_1} > Mgl \quad \text{oder} \quad \Omega^2 > \frac{4MglI_1}{I_3^2} \equiv \Omega_0$$

- Rotation um vertikale Achse stabil für  $\Omega^2 > \Omega_0$ , instabil für  $\Omega^2 < \Omega_0$
- Schlafender Kreisel:
  - Vertikal rasch, i.e.  $\Omega^2 > \Omega_0$ , rotierender Kreisel behält Achse bei ("schläft").
  - Beginnt zu taumeln, wenn durch Reibung genügend Rotationsenergie verbraucht, i.e.  $\Omega^2 < \Omega_0$ .

(ii) Anwendung auf die Erde

- Im allgemeinen kompliziert und interessant, hier nur ein Beitrag
- Erdkreisel nicht frei auf Grund der Gezeitenkräfte:

- Gravitationskraft:

$$ma = \frac{\gamma m M}{r^2}$$

Relativbeschleunigung an Punkten  $r$  und  $r + \delta r$

$$a = \frac{\gamma M}{r^2} - \frac{\gamma M}{(r + \delta r)^2}$$

- Mit

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \dots$$

folgt

$$a_{\text{Gez}} = \frac{2\gamma M \delta r}{r^3}$$

- Da Gezeitenkräfte  $\propto 1/r^3$ 
  - Effekt des Mondes 2 mal Effekt der Sonne
  - Gravitationskraft Sonne = 175 mal Mond
- Bewirkt Präzessionsperiode von 26.000 Jahre. Bad news für Astrologie: Sternzeichen haben sich seit Festlegung vor etwa 2000 Jahren um eins verschoben :-)

Lessons learnt:

- Kreisel-Bewegungsgleichungen (leicht) aus Lagrange-Funktion ableitet
- Schwerer Kreisel:
  - Lösung durch ein-dimensionale Probleme für  $\theta, \varphi, \psi$ .
  - Präzessions- und Nutationsbewegung.
  - Schlafender Kreisel, Schwellwertverhalten
  - Erde: bad news for astrology

9. Mi.

## 10 10. Woche: Lagrangesche Mechanik: Für Geniesser

### 10.1 Noethersches Theorem

Emmi Noether \* 1882, † 1935

- Erinnere zyklische Koorddinaten:  
Hängt Lagrange-Funktion nicht von Koordinate  $q_i$  ab, so folgt für Lagrange-Gleichungen (2. Art):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

und der kanonisch konjugierte Impuls

$$p_{q_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

ist erhalten.

- Beispiele:
  - Sphärisches Pendel:  $\varphi$  zyklische Koordinate:  $z$ -Komponente des Drehimpulses erhalten
  - Schwerer Kreisell:  $\varphi$  &  $\psi$  zyklische Koordinaten: Projektionen von  $\vec{L}$  erhalten
- Betrachte sphärisches Pendel

$$L(\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - mgl(1 - \cos \theta)$$

Unabhängigkeit der Lagrangefunktion von  $\varphi$  bedeutet Invarianz oder Symmetrie der Lagrange-Funktion unter der Transformation: Drehung um  $z$ -Achse.

- Der Zusammenhang zwischen Invarianzen unter Transformationen oder Symmetrien und Erhaltungssätzen gilt tiefer:

Noethersches Theorem:

Sei  $q(t) = (q_1(t), \dots, q_f(t))$  Lösung der Lagrange-Gleichungen.

Ist Lagrange-Funktion invariant unter den Transformationen

$$q_i(t) \mapsto q_i(t, \alpha), \quad i = 1, \dots, f$$

d.h.

$$L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

so ist die Größe

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tau_i, \quad \text{mit } \tau_i = \left. \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \quad (42)$$

eine Erhaltungsgröße.

Beweis:

- Sei durch

$$q = q(t, \alpha), \quad q(t, 0) = q(t), \quad \alpha \in R$$

Schar von Bahnkurven gegeben, so dass gilt

$$L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

- Ableitung nach  $\alpha$ . Da rechte Seite nicht von  $\alpha$  abhängt, folgt:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t), \dot{q}(t), t) \right|_{\alpha=0} = 0$$

- Explizit (Rechnung stehen lassen):

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} + \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \end{aligned} \quad (43)$$

wenn nun  $q(t)$  Lösung der Lagrangeschen Bewegungsgleichung, so folgt:

$$= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tau_i \right) \Big|_{\alpha=0}, \quad \text{mit } \tau_i = \left. \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$$

- Beweis Ende

Beispiel:

- Lagrange-Funktion in kartesischen Koordinaten

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t)$$

- Sei  $L$  invariant unter Translation-Transformation:

$$\vec{r}_i(t) \mapsto \vec{r}_i(t, \alpha) = \vec{r}_i(t) + \alpha \vec{e}, \quad \forall i, \quad \text{mit } \vec{e} \text{ beliebig, aber fester Einheitsvektor}$$

- Ist z.B. der Fall, wenn Potential  $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  nur von Differenzvektoren  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$  abhängt.

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_i - \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_{N-1} - \vec{r}_N)$$

wegen

$$\vec{r}_i(t, \alpha) - \vec{r}_j(t, \alpha) = (\vec{r}_i(t) + \alpha \vec{e}) - (\vec{r}_j(t) + \alpha \vec{e}) = \vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)$$

- Hier  $(q_1, \dots, q_f) = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$

$$\vec{\tau}_i = \left. \frac{\partial \vec{r}_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \vec{e}$$

und

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \vec{e} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \vec{e} = \vec{P} \vec{e}$$

ist erhaltene Größe.

- Da  $\vec{e}$  beliebig, ist  $\vec{P}$  erhalten.

Ist das System translationsinvariant, so ist der Gesamtimpuls erhalten.

Wird Universum kein anders, wenn man es einen Meter nach oben verschiebt  
 $\implies$  Gesamtimpuls des Universum erhalten

- Gilt Invarianz nur für speziellen Vektor  $\vec{e}_0$  so ist nur  $\vec{P}\vec{e}_0$  Komponente von  $\vec{P}$  erhalten.

Uebung Drehinvarianz

Uebung Erhaltene Größen bei schweren Kreisel

Verallgemeinerung:

- Falls Lagrange-Funktion  $L$  nicht invariant, es aber gilt, dass

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) \right|_{\alpha=0} = \underbrace{\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t), \dot{q}(t), t) \right|_{\alpha=0}}_{=0} + \frac{d}{dt} f(q(t), \dot{q}(t), t)$$

folgt analog zu Gl. (43)

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tau_i - f(q(t), \dot{q}(t), t) \right)$$

- Und es gilt:

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tau_i - f(q(t), \dot{q}(t), t), \quad \tau_i = \left. \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \quad \text{ist erhaltene Größe}$$

Beispiel:

- Betrachte Translation in der Zeit;

$$t \mapsto t + \alpha, \text{ folglich } q(t, \alpha) = q(t + \alpha), \quad \tau_i = \left. \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \dot{q}_i$$

- Dann gilt einerseits:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t + \alpha), \dot{q}(t + \alpha), t) \right|_{\alpha=0} &= \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i(t + \alpha) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i(t + \alpha) \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i(t) \right) \end{aligned}$$

- Andererseits gilt:

$$\frac{d}{dt}L(q(t), \dot{q}(t), t) = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i(t) \right)$$

- Folge: Hängt Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit ab, so gilt:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t + \alpha), \dot{q}(t + \alpha)) \right|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} L(q(t), \dot{q}(t)), \quad f(\cdot) \text{ von oben} = L(\cdot)$$

und

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q(t), \dot{q}(t)) \quad \text{ist erhaltene Größe.}$$

- Déjà vu Kapitel 6.2.1, Gln. (29,30,31):

Aus Zeitunabhängigkeit folgt:

$$T = \sum_{kl} m_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l$$

und damit

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$$

- Somit folgt

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - (T - U) = E$$

- In kartesischen Koordinaten:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \dot{\vec{r}}_i - L = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \left( \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \right) = T + U = E$$

Aus Invarianz unter Zeittranslation folgt Energieerhaltung  
Eine recht globale Aussage :-)

- Wird Universum kein anders, wenn man es eine halbe Stunde später ablaufen läßt  $\implies$  Gesamtenergie des Universum erhalten

Dimensionsbetrachtung:

- Translationsinvarianz im Raum  $\implies$  Impulserhaltung  $[xp] = \frac{m \text{ kg m}}{\text{sec}}$
- Translationsinvarianz in Zeit  $\implies$  Energieerhaltung  $[tE] = \frac{\text{sec kg m}^2}{\text{sec}^2}$

- Einheit jeweils  $\frac{kgm^2}{sec} = [\text{Wirkung}]$
- Folgt auch aus Dimensionsanalyse von Gl. (42)

Wirkung

- Wirkung ergibt sich auch bei

$$\int_t dt' L(q(t'), \dot{q}(t'), t')$$

davon mehr im übernächsten Unterkapitel 10.2 Hamiltonsches Prinzip

- Wirkung in Quantenmechanik:

Unschärferelation:

Sei  $\Delta x_i, \Delta p_j$  die möglichen Messgenauigkeiten von Ort und Impuls, so gilt:

$$\Delta x_i \Delta p_j \geq \delta_{ij} \frac{\hbar}{2}$$

Der Zusammenhang "Invarianz/Symmetrie – Erhaltungsgröße" ist fundamental

Speziell Teilchenphysik

- Experimente legen Erhaltungssätze nahe:  
Elektrische Ladung, Baryonen-Ladung, Isospin, ...
- Spieß umdrehen:  
Konstruktionsrichtlinie für Theorien, die diese Erhaltungsgrößen liefern müssen.

10. Mo.

## 10.2 Das Hamiltonsche Prinzip

### 10.2.1 Funktionale und Variationsrechnung (für Fußgänger)

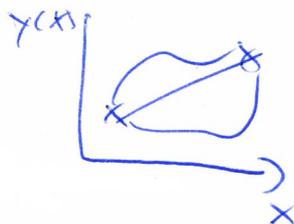
- Vorbemerkung:

Wir betrachten im folgenden Bahnkurven  $x(t)$ .

Alles gilt aber auch für Funktionen  $y = y(x)$  per  $t \mapsto x$  und  $x \mapsto y$

Beispiel:

- Gegeben: Zwei Punkte  $(x_1, y(x_1))$  und  $(x_2, y(x_2))$



- Frage: Was ist die kürzeste Verbindung zwischen den Punkten ?

– Antwort: Grade Linie

- $B_{x_1 x_2}$ : Menge aller Bahnkurven  $\gamma: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $t \mapsto \vec{x}(t)$  mit  $x(t_1) = x_1$ ,  $x(t_2) = x_2$
- In folgenden identifiziere  $\gamma$  mit  $x(t)$  und seinen Anfangs- und Endwerten
- Funktional  $I(\gamma)$ :

$$I(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} dt F(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)), \quad I(\gamma) : B_{\vec{x}_1 \vec{x}_2} \mapsto \mathbb{R}$$

- Aufgabe der Variationsrechnung:

- Gegeben Anfangs- und Endwerte  $\vec{x}(t_1) = \vec{x}_1$ ,  $\vec{x}(t_2) = \vec{x}_2$
- Gegeben  $F(., ., .)$  aus Problemstellung  
Beispiel:  $F(\dot{\vec{x}}(t)) = \sqrt{\dot{\vec{x}}^2(t)}$ , dann  $I(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{\vec{x}}^2(t)}$  Bogenlänge
- Ermittle Bahnkurve  $\vec{x}(t)$ , die Funktional  $I(\gamma)$  extremal macht.
- ZEICHNUNG dazu
- Analogie Differentialrechnung: Gegeben Funktion  $y(x)$ , suche  $x_0$ , das  $y(x)$  extremal macht.  $y'(x_0) = 0$
- Hier nicht Punkt  $x_0$ , sondern Bahnkurve  $\vec{x}(t)$  gesucht
- Ab jetzt keine Vektorpfeile mehr

- Stetigkeit

- Bei Funktionen  $y(x)$ :  
 $y(x)$  stetig an  $x_0$ , wenn für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass gilt

$$\text{Aus } |x - x_0| < \delta \quad \text{folgt} \quad |y(x) - y(x_0)| < \epsilon$$

- Sei  $\vec{\eta}(t)$  Bahnkurve mit  $\vec{\eta}(t_1) = \vec{\eta}(t_2) = 0$
- $I(\gamma)$  stetig im "Punkt" Bahnkurve  $x(t)$

$$\text{Aus } \|\alpha\vec{\eta}(t)\| < \delta \quad \text{folgt} \quad |I(x(t) + \alpha\vec{\eta}(t)) - I(x(t))| < \epsilon \quad \forall \eta(t)$$

mit Norm z.B.

$$\|\alpha\vec{\eta}(t)\| := \max_{t_1 < t < t_2} |\alpha\vec{\eta}(t)| \quad \text{oder} \quad \|\alpha\vec{\eta}(t)\| = \int_{t_1}^{t_2} |\alpha\vec{\eta}(t)|$$

- Differenzierbar:

- Bei Funktionen  $y(x)$ : Differenzierbar an  $x_0$ , wenn Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = \frac{df}{dx} = f'$$

existiert

–  $I(\gamma)$  differenzierbar im "Punkt" Bahnkurve  $x(t)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{I(x(t) + \alpha\eta(t)) - I(x(t))}{\|\alpha\eta(t)\|} = \frac{dI}{\|d\alpha\eta(t)\|} = I'(x(t)) \quad \forall \eta(t)$$

$$\frac{I(x(t) + \alpha\eta(t)) - I(x(t))}{\|\alpha\eta(t)\|} \quad \& \quad \frac{dI}{\|d\alpha\eta(t)\|} \quad \text{sind} \quad \forall \eta(t) \quad \text{schwierige Terme}$$

Aber Problem klar gestellt.

ZEICHNUNG dazu

- Daher: Definiere

$$x(t, \alpha) = x(t) + \alpha\eta(t), \quad \text{mit } \eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$$

und betrachte

$$I(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} dt F(x(t, \alpha), \dot{x}(t, \alpha))$$

Für gleich:

$$\frac{dx(t, \alpha)}{d\alpha} = \eta(t), \quad \frac{dx(t_1, \alpha)}{d\alpha} = \frac{dx(t_2, \alpha)}{d\alpha} = 0$$

- Bilde Variation von I, d.h. wie ändert sich  $I$ , wenn man mit  $\alpha$  ein bisschen an  $x(t)$  wackelt

$$\delta I := \frac{dI}{da} da = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{d\alpha} \right) d\alpha$$

Mit

$$\frac{d\dot{x}}{d\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{d\alpha}$$

folgt

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \frac{dx}{d\alpha} \right) d\alpha$$

- Nun 2. Term partiell integriert

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \frac{dx}{d\alpha} = - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \frac{dx}{d\alpha} + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{dx}{d\alpha} \right|_{t_1}^{t_2}$$

2. Term verschwindet, da  $\frac{dx}{d\alpha} = \eta(t)$  bei  $t_1$  und  $t_2$  verschwindet.

- Es folgt

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \frac{dx}{d\alpha} d\alpha$$

- Der Ausdruck

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) =: \frac{\delta F}{\delta x}$$

heißt Variationsableitung von  $F$  nach  $x$

- Infinitesimale Variation der Kurve  $x$ :

$$\delta x := \frac{dx}{d\alpha} d\alpha = \eta d\alpha$$

Ergibt

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \delta x \quad (44)$$

- Nun das Argument:

- $I(\alpha)$  soll extremal werden.
- Das heißt,  $I(\alpha)$  soll sich bei infinitesimalen Variationen der Kurve  $x$  nicht ändern.
- Soll dies  $\forall$  Variationen  $\delta x$  gelten, so muss Klammer in Gl. (44) verschwinden:

Es folgt: Eulersche Differentialgleichung der Variationsrechnung:

$I(\gamma)$  wird extremal, wenn

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$

- Beachte: Problem, dass es unendlich viele mögliche  $\eta(t)$  gibt, ist gelöst.

## 10.2.2 Hamiltonsches Prinzip

Setzt man für  $F(x, \dot{x}, t)$  die Lagrangefunktion  $L(q, \dot{q}, t)$ , so erhält man die Lagrange-Gleichung 2. Art.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Daher nennt man Lagrange-Gleichungen 2. Art auch Euler-Lagrange Gleichungen

- Merke: Was in Kapitel 6 mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips abgeleitet wurde, ergibt sich hier aus der Variationsrechnung.
- Wirkungsfunktional

$$I(q) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

Wirkung, weil  $L$  Dimension einer Energie, Zeitintegral darüber hat Dimension einer Wirkung

- Teilchen bewegt sich so, dass die Wirkung extremal wird. Analyse der 2. Ableitung zeigt, dass Wirkung in der Regel minimal wird.

- Hamiltonsches Prinzip: Prinzip der kleinsten Wirkung
- System bewegt sich so, dass  $I(q)$  minimal wird
- Dies entspricht den Lagrange-Gleichungen 2. Art
- Diese entsprechen in kartesischen Koordinaten den Newtonschen Bewegungsgleichungen
- Formal:  
Bahnkurve  $x(t)$  genau dann Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{x}_i = -\nabla_i U(x_1, \dots, x_N)$$

wenn sie extremaler oder stationärer Punkt des Wirkungsfunktional

$$I(x(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t), t)$$

ist.

- Touch von Teleologie<sup>5</sup>, da  $I(q)$  globale Größe. "als ob"-Beschreibung
- Hamiltonsches Prinzip ist koordinatenunabhängig
  - Gehe von Koordinaten  $x$  zu Koordinaten  $q$  über, im allgemeinen zeitabhängige Transformation

$$x = x(q(t), t)$$

- Transformation der Geschwindigkeit

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}x(q(t), t) = \sum_i \frac{\partial x(q(t), t)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x(q(t), t)}{\partial t}$$

- Wirkungsfunktional der Bahnkurve  $\gamma$

$$\begin{aligned} I(\gamma) &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(x(t), \dot{x}(t), t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(x(q(t)), \sum_i \frac{\partial x(q(t), t)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x(q(t), t)}{\partial t}, t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \tilde{L}(q(t), \dot{q}(t), t) \end{aligned}$$

$I(\gamma)$  hängt nicht davon ab, ob Bahnkurve durch  $x$  oder  $q$  beschrieben wird.

Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (45)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} = 0 \quad (46)$$

<sup>5</sup>griech: télos: Ziel, logos: Lehre

sind äquivalent, i.e.  $q(t)$  löst Gl. (46) genau dann wenn  $x(q(t), t)$  Gl. (45) löst

- Analog: Fermatschen Prinzip "Licht nimmt seinen Weg immer so, dass es ihn in der kürzesten Zeit zurücklegt"

$$I(x) = \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} dx n(x), \quad n(\cdot) \text{ Brechungsindex, } [I] = t$$

### 10.2.3 Ein Beispiel

Der Kürzeste Weg

- $y(x)$  Formulierung

$$\text{Mit } y' = \frac{dy}{dx} : \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

– ZEICHNUNG mit  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ,  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + y'(x)^2}$

– Funktional

$$I(y) = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

– Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{d}{dx} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = 0$$

– Lösung:

$$y' = \text{const}, \quad y = ax + b$$

- $x(t)$  Formulierung

– Funktional

$$I(x) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{x}^2}, \quad L(x, \dot{x}, t) = \sqrt{\dot{x}^2}$$

– Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 = \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$$

–  $\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$  Tangenteneinheitsvektor, der längs der Kurve konstant sein muss:  
Grade

Zusammenfassung

- Aufgabe der Variationsrechnung: Extremalisiere Funktional  $I(x) = \int_{t_1}^{t_2} dt F(x(t), \dot{x}(t), t)$
- Variationsrechnung führt auf  $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$

- Ergibt, dass Lagrange-Gleichungen 2. Art Wirkungsfunktional  $I(q) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t)$  extremalisieren.
- Ableitung von Theorien aus Extremalprinzipien hat sich als sehr fruchtbar erwiesen.
- Darstellung sehr kompakt: Bewegungsgleichung aus  $\delta I = 0$

Uebung zu Extremalprinzipien: Brachistochronen-Problem

Uebung: Lagrange-Multiplier

Ergänzen: Hamilton-Prinzip und Lagrange 1. Art vorrechnen

10. Mi.

## 10.3 Mechanische Ähnlichkeit revisited

Hermeneutisches Problem

- Betrachte statt  $L(q, \dot{q}, t)$  skalierte Version:

$$L'(q, \dot{q}, t) = \gamma L(q, \dot{q}, t), \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

- Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L'}{\partial q} = \gamma \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) = 0 \quad (47)$$

Bewegungsgleichungen sind invariant unter Skalierung der Lagrange-Funktion

- Erinnerung: Homogene Funktionen
- Annahme:  $U(q)$  sein homogen vom Grade  $k$ :

$$U(\alpha q_1, \dots, \alpha q_f) = \alpha^k U(q_1, \dots, q_f)$$

- Betrachte Transformationen  $q'_i = \alpha q_i$   $t' = \beta t$

Dann folgt

$$\dot{q}'_i = \frac{dq'_i}{dt'} = \frac{\alpha}{\beta} \dot{q}_i, \quad \implies \quad \text{Skalierung der kinetischen Energie um Faktor } \frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

- Somit

$$L(\alpha q, \frac{\alpha}{\beta} \dot{q}, \beta t) = T(\frac{\alpha}{\beta} \dot{q}_i) - U(\alpha q_i) = \frac{\alpha^2}{\beta^2} T(\dot{q}_i) - \alpha^k U(q_i)$$

- Wähle

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k, \quad \text{oder } \beta = \alpha^{1-k/2}$$

dann resultiert eine Skalierung der Lagrange-Funktion

$$L(\alpha q, \frac{\alpha}{\beta} \dot{q}, \beta t) = \frac{\alpha^2}{\beta^2} L(q, \dot{q}, t) = \gamma L(q, \dot{q}, t) = L'(q, \dot{q}, t)$$

und Bewegungsgleichungen bleiben mit Gl. (47) unverändert.

- Ergibt geometrisch ähnliche Bahnen.
- Beispiel: Gravitation

$$U(r) \propto \frac{1}{r}, \quad k = -1, \quad \beta = \alpha^{3/2}, \quad \frac{t'}{t} = \left(\frac{q_i'}{q_i}\right)^{3/2}$$

Wieder 3. Keplersches Gesetz

## 10.4 Kanonisch konjugierter Impuls im magnetischen Falle

- Erinnere kanonisch konjugierten oder verallgemeinerten Impuls:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

- Betrachte: Ladung in elektromagnetischem Feld

Lorenz-Kraft:

$$\vec{F}_L = e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \dot{\vec{r}} \times \vec{B} \right)$$

Kommendes Semester: Es existieren Potentiale  $\phi(\vec{r}, t)$  und  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ , so dass:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}$$

- Für das Potential

$$U(r, \dot{r}, t) = e\phi(r, t) - \frac{e}{c} \vec{A}(r, t) \cdot \dot{\vec{r}}$$

und damit Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - e\phi + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}$$

ergibt sich die Lorentz-Kraft.

- Somit

Verallgemeinerter Impuls im magnetischen Falle:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + \frac{e}{c} \vec{A}$$

”Teil des Potentials wandert in den kinetischen Teil”

- Vorschau: Wird Auswirkung in der Quantenmechanik haben

## 10.5 Uneindeutigkeit der Lagrange-Funktion

- Betrachte Funktion  $M(q, t)$  und sei

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}M(q, t) = L(q, \dot{q}, t) + \sum_i \frac{\partial M}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial M}{\partial t}$$

- Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L'}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \right) \frac{d}{dt} M(q, t) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \sum_i \frac{\partial M}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial M}{\partial t} \right) - \frac{\partial M}{\partial q_k} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \end{aligned}$$

sind invariant.

- Ergo: Lagrange-Funktion ist keine physikalische Observable.
- Beispiel: Harmonischer Oszillator

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

Betrachte  $M(q, t) = \frac{q^2}{2}$

$$L' = L + \frac{d}{dt} \frac{q^2}{2} = L + q\dot{q}$$

Gibt die selben Bewegungsgleichungen.

- Invarianz der Bewegungsgleichungen, d.h. der beobachtbaren Physik, bei Änderung der Lagrange-Funktion, heißt Eichinvarianz

Solche "Änderungen" heißen Eichtransformationen.

Wird in Elektrodynamik und Quantenmechanik wieder auftauchen

- Ferner sind Lagrange-Gleichungen unter Diffeomorphismen, d.h. umkehrbar eindeutigen Abbildungen  $f(q)$ ,  $f$  &  $f^{-1}$  differenzierbar, invariant.

Lessons learnt:

- Noether Theorem: Invarianzen/Symmetrien induzieren Erhaltungsgrößen
- Hamiltonsches Prinzip: Prinzip der kleinsten Wirkung, leicht teleologisch, aber sehr fruchtbar
- Mechanische Ähnlichkeit gibt ohne jede Arbeit 3. Kepler Gesetz
- Lagrange-Funktion keine physikalische Observable, sondern intellektuelle Leistung
- Generell: Lagrange-Formalismus: Von Behandlung von Zwangskräften zur eigenständigen Theorie

# 11 11. Woche: Hamiltonsche Mechanik: Grundlagen

Sir William Rowan Hamilton \* 1805 † 1865

## 11.1 Von Lagrange zu Hamilton

### 11.1.1 Legendre-Transformation

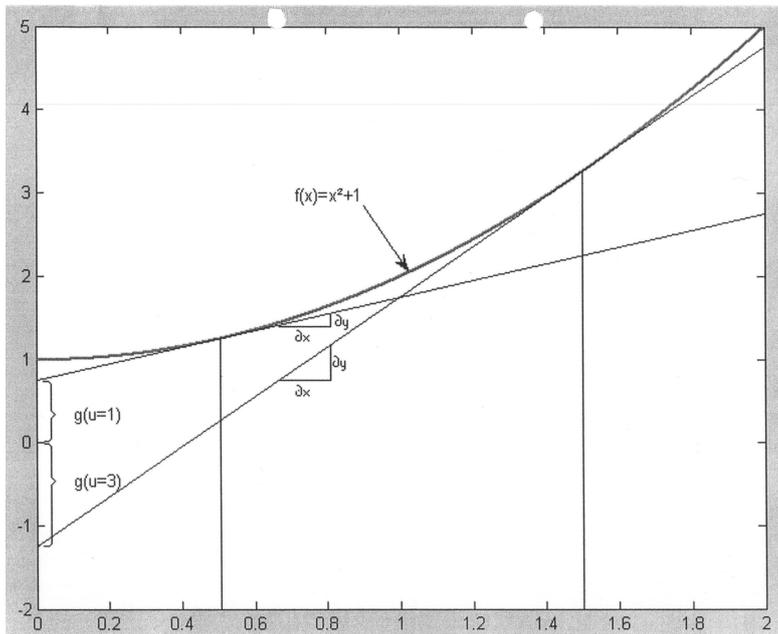
- Allgemeines Verfahren zum Wechsel von unabhängigen Variablen
- Sei  $f(x)$  hinreichend glatte Funktion mit  $d^2f/dx^2 \neq 0$
- Definiere Legendre-Transformation  $\mathcal{L}$  der Funktion  $f(x)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(x)) &:= \frac{\partial f}{\partial x} x - f(x) \\ \text{neue Variable } u &:= \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x = h(u) \\ \mathcal{L}(f(x)) &= u h(u) - f(h(u)) =: (\mathcal{L}f)(u) \end{aligned} \tag{48}$$

oder

$$(\mathcal{L}f)(u) =: g(u) = ux - f(x), \quad x \text{ festgelegt aus } u = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \tag{49}$$

- Wegen  $d^2f/dx^2 \neq 0$  eindeutig



- Anschauliche Interpretation:  
 $g(u)$  ist der maximale  $y$ -Abstand zwischen  $f(x)$  und  $ux$ , kleiner Shift: darum Berührungstransformation
- Mathematische Interpretation:  
Legendre-Transformation: Unabhängige Variable  $x$  wird durch neue unabhängige Variable  $u = \frac{\partial f}{\partial x}$  ersetzt.

- Mit

$$(\mathcal{L}f)(u) =: g(u) = ux - f(x)$$

folgt:

Legendre-Transformation ist involutorisch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\mathcal{L}f(x) = \mathcal{L}g(u) &= \frac{\partial g}{\partial u} u - g(u) \\ &= xu - ux + f(x) = f(x) \end{aligned}$$

- Bei mehreren Variablen

$$g(u_1, u_2) = u_1x_1 + u_2x_2 - f(x_1, x_2) = \sum_i u_ix_i - f(x_1, x_2) \quad u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

- Bei ausgewählten Variablen:

$$g(u_1, u_2, x_3) = u_1x_1 + u_2x_2 - f(x_1, x_2, x_3), \quad u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Differentiell, das macht es klarer:

- Für Differential von  $f(x)$  gilt:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx = u dx,$$

- Für von  $u = \frac{\partial f}{\partial x}$ , was anderes ist nicht da, abhängige Funktion  $g$  gilt:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial u} du = x du.$$

- Bilde Differential von  $ux$ :

$$d(ux) = x du + u dx$$

Vergleich mit  $dg$  &  $df$

$$d(ux) = dg + df$$

- Also

$$dg = d(ux - f),$$

und

$$g(u) = ux - f(x)$$

- Mehrdimensional & differentiell für  $f(x, y)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

mit

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}$$

dann

$$df(x, y) = u dx + v dy$$

$$d(ux + vy) = u dx + x du + v dy + y dv$$

$$dg(u, v) = x du + y dv$$

Ergibt

$$dg(u, v) = d(ux + vy - f)$$

### 11.1.2 Mit Legendre-Transformation von Lagrange zu Hamilton

- Mit Lagrange-Funktion  $L = T - U$  gelten Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

- Verallgemeinerte, kanonisch-konjugierte Impulse:

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q, \dot{q}, t) \quad p_i \text{ entspricht } u \text{ von Gl. (48), } \dot{q}_i \text{ entspricht } x$$

Löse analog Gl. (49) nach  $\dot{q}$  auf:

$$\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$$

- Definiere die Hamilton-Funktion als Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion

$$H(q, p, t) = \mathcal{L}L(q, \dot{q}, t)$$

konkret, mit  $q = (q_1, \dots, q_f)$ ,  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ ,  $\dot{p} = (\dot{p}_1, \dots, \dot{p}_f)$ ,  $p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ :

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t)$$

- In kartesischen Koordinaten, wenn Kräfte nicht von Geschwindigkeiten abhängen (allgemeiner Fall, siehe unten), mit:

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m_i \dot{\vec{r}}_i, \quad \dot{\vec{r}}_i = \frac{\vec{p}_i}{m_i}$$

folgt:

$$\begin{aligned} & H(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) \\ &= \sum_i \vec{p}_i \dot{\vec{r}}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N, t) - L(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N, t), \dots, \\ & \quad \dot{\vec{r}}_N(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N, t), t) \\ &= \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{m} - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{m_i} - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \\ &= \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = T + U \end{aligned}$$

- Anwendungen in der Statistischen Physik:

Analog zu Paarung  $(\dot{q}, p)$  gibt es in der Statistischen Physik Paarungen  $(p, V)$ ,  $(S, T)$  und  $(\mu, N)$

Verschiedene Energien in Abhängigkeit verschiedener Variablen

- Innere Energie:  $E(S, V, N)$
- Enthalpie:  $H(S, p, N)$
- Freie Enthalpie:  $G(T, p, N)$
- ...

”Umschalten” mit Legendre-Transformation

11. Mo.

## 11.2 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen sind äquivalent zu den

Hamiltonschen Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}$$

- Beweis, eine Richtung:

Aus Definition von  $H$ :

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t)$$

folgt

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j(q, p, t) + \sum_i \left( p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} \right) = \dot{q}_j, \quad \text{da } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} =: p_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j}$$

Aus Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

und kanonisch-konjugierten Impulsen:

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

folgt:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -\dot{p}_j$$

- Beweis, andere Richtung:

Analog folgt aus nochmaliger Legendre-Transformation (remember: involutorisch) :

$$L(q, \dot{q}, t) = \sum_i p_i(q, \dot{q}, t) \dot{q}_i - H(q, p(q, \dot{q}, t), t)$$

Mit

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

folgt

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_j} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \equiv \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

### Meditation über Hamilton

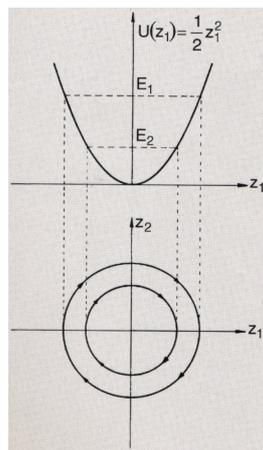
- System mit  $f$  Freiheitsgraden wird durch  $f$  Koordianten  $q_1, \dots, q_f$  und  $f$  Impulse  $p_1, \dots, p_f$  beschrieben.
- Anfangsbedingungen:  
Statt  $\vec{q}(t_0)$  und  $\dot{\vec{q}}(t_0)$  bei Lagrange nun  $\vec{q}(t_0)$  und  $\vec{p}(t_0)$  bei Hamilton
- Beachte: In Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

sind  $q_i$  und  $p_i$  sind symmetrisch eigenständig

- $(\vec{q}, \vec{p})$  bildet den Phasenraum
- Zustand im Phasenraum eindeutig und

Hamiltonsche Gleichungen induzieren Vektorfeld



Für's Gemüt formaler:

- Lagrange:
  - Konfigurationsraum der  $q \in R^{3N}$
  - Bewegungsgleichungen: Differentialgleichungen 2. Ordnung
  - Lösung:  $\vec{q}(t)$
  - Rolle von  $\dot{\vec{q}}(t)$ 
    - \*  $\dot{\vec{q}}(0)$  geht als Anfangsbedingung ein, hat dann aber seine Schuldigkeit getan, denn ...
    - \*  $\dot{\vec{q}}(t), t > 0$  ist abgeleitete<sup>6</sup> Größe
- Hamilton
  - Phasenraum  $(q, p) \in R^{6N}$
  - Bewegungsgleichungen: Differentialgleichungen 1. Ordnung
  - Lösung:  $\begin{pmatrix} \vec{q}(t) \\ \vec{p}(t) \end{pmatrix}$
  - Rollen von  $q(t)$  und  $p(t)$  komplett gleichberechtigt.

### 11.2.1 Beispiele

(i) Harmonischer Oszillator, eine Dimension:

- Potential:

$$U(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

Lagrange-Funktion:

$$L(q, \dot{q}) = T - U = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

- Verallgemeinerter Impuls:

$$p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \quad \dot{q} = p/m$$

- Hamilton = Legendre(Lagrange):

$$\begin{aligned} H(q, p) &= \mathcal{L}(L(q, \dot{q})) = \dot{q}(p)p - L(q, \dot{q}(p)) = \dot{q}(p)p - \frac{1}{2}m\dot{q}(p)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \\ &= \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2}m\frac{p^2}{m^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = T + U \end{aligned}$$

- Bewegungsgleichungen:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q = -\nabla U$$

Mit

$$\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m}$$

Erwartungsgemäß:

$$\ddot{q} = -\omega^2 q = 0$$

---

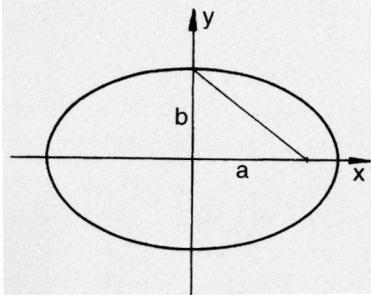
<sup>6</sup>Wortspiel-Verdacht

- Hamilton-Funktion ist hier identisch mit Energie, die erhalten ist.

$$H = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

definiert Ellipsen mit Halbachsen:

$$a = \sqrt{\frac{2}{m\omega^2}} \sqrt{E}, \quad b = \sqrt{2m} \sqrt{E}$$



(ii) Magnetischer Fall

- Erinnere Lagrangefunktion im elektromagnetischen Fall ( $c = 1$ ):

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + eA\dot{q} - e\phi$$

- Kanonischer Impuls  $\neq$  kinetischer Impuls  $m\dot{q}$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} + eA$$

aufgelöst nach  $\dot{q}$

$$\dot{q} = \frac{1}{m}(p - eA)$$

- Legendre-Transformation:

$$\begin{aligned} H(q, p) &= p\dot{q}(q, p) - L(q, \dot{q}(q, p)) \\ &= p \left( \frac{1}{m}(p - eA) \right) - \left( \frac{1}{2}m \left( \frac{1}{m}(p - eA) \right)^2 + eA \frac{1}{m}(p - eA) - e\phi \right) \\ &= \frac{p^2}{m} - \frac{peA}{m} - \frac{p^2}{2m} + \frac{peA}{m} - \frac{e^2 A^2}{2m} - \frac{eAp}{m} + \frac{e^2 A^2}{m} + e\phi \\ &= \frac{p^2}{2m} - \frac{peA}{m} + \frac{e^2 A^2}{2m} + e\phi = \frac{1}{2m}(p - eA)^2 + e\phi \end{aligned}$$

- Merken für Quantenmechanik

### 11.2.2 Hamiltonfunktion, Energie und Erhaltungsgrößen

- Mit

$$H(q, p, t) = \sum_i \dot{q}_i(q, p, t) p_i - L(q, \dot{q}(q, p, t), t)$$

folgt

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} p_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

- Mit Gl. (28)

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad \text{und} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

folgt aus Definition von  $H$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Ergo:

$H$  nicht explizit zeitabhängig, d.h. zeittranslationsinvariant  $\implies H = const$

- Hängt  $T$  nur quadratisch von  $\dot{q}_i$  ab, dann ist Hamiltonfunktion

$$H(q, p) = T(q, p) + U(q)$$

gleich der Energie

- Das ist bei holonom-skleronomen Systemen mit konservativen Kräften der Fall.

Folge: Man braucht Hamilton-Funktion nicht über Legendre-Transformation der Lagrange-Funktion bestimmen, sondern einfach aus  $H = T + U$

- Zyklische Koordinate: Hängt  $H(q, p, t)$  nicht von  $q_i$  ab, so gilt:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad \text{folgt } p_i = const, \text{ Erhaltungsgröße}$$

11. Mi

### 11.3 Theorem von Liouville

- Divergenz und Rotation am Beispiel  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = div \vec{E} = 4\pi\rho(\vec{r})$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = div \vec{B} = 0$ ,  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = rot \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}$  diskutieren
- Integralsätze anschaulich diskutieren

- Betrachte Vektorfeld  $\vec{x}$ , das durch Hamiltonsche Gleichungen induziert wird.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \dot{\vec{q}} \\ \dot{\vec{p}} \end{pmatrix}$$

und seine Divergenz

$$\vec{\nabla} \vec{x} = \text{div} \vec{x} = \left( \frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial p} \right) (\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{p}})' = \left( \frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial p} \right) \left( \frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right)' = \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} - \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} = 0$$

Satz von Schwartz

- Folgt:

In Hamiltonschen Systemen ist das Phasenraumvolumen ist erhalten.

- Diese Einsicht ist nur im Hamilton-Formalismus möglich.
- ZEICHNUNG für Harmonischen Oszillator

## 11.4 Poissonklammern

- Betrachte Zeitentwicklung einer Größe  $A(q(t), p(t), t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A(q(t), p(t), t) &= \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \end{aligned}$$

- Definiere

Poissonklammer zweier Funktionen  $f(q, p, t)$  und  $g(q, p, t)$  auf dem Phasenraum

$$\{f, g\} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

- Ist  $A$  nicht explizit zeitabhängig, so Zeitentwicklung durch:

$$\frac{d}{dt} A(q(t), p(t)) = \{A, H\}$$

$A(q(t), p(t))$  ist genau dann erhaltene Größe, wenn  $\{A, H\} = 0$

- Beispiel: Radialsymmetrisches Potential

In Kugelkoordinaten, mit kanonisch konjugierten Impulsen  $p_r, p_\theta, p_\varphi$

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r)$$

folgt für Drehimpulskomponenten  $L_i$

$$\{L_i, H\} = 0$$

Drehimpuls erhalten.

Beweis als Übung

- Bewegungsgleichungen:

$$\{q_j, H\} = \sum_i \left( \frac{\partial q_j}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial q_j}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j$$

$$\{p_j, H\} = \sum_i \left( \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = \dot{p}_j$$

- Aber auch

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

Daraus wird in Quantenmechanik die Unschärfe-Relation  
und aus  $\{.,.\}$  der Kommutator  $[\cdot, \cdot]$

- Es gilt

$$\{A, B\} = -\{B, A\}$$

$$\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\}$$

$$\{A, BC\} = \{A, B\}C + \{A, C\}B$$

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0 \quad \text{Jacobi-Identität}$$

Lessons learnt:

- Legendre Transformation: Wechsel der unabhängigen Variablen
- Hamilton = Legendre (Lagrange)
- Hamiltonsche Bewegungsgleichungen induzieren Vektorfeld im Phasenraum
- Liouville: In Hamiltonschen Systemen ist das Phasenraumvolumen erhalten.
- Poisson-Klammer mit Hamiltonian bestimmt die Zeitentwicklung von Observablen
- Bitte alles merken für Quantenmechanik

## 12 12. Woche: Hamiltonsche Mechanik: Für Genießer

### 12.1 Hamiltonsche Gleichungen aus Variationsprinzip

Hamiltonsches Prinzip revisited

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad \delta \rightarrow d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

$$\delta I = d\alpha \frac{\partial I}{\partial \alpha} = d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \int \left( \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right) dt = 0$$

$$d\alpha \int \sum_i \left( \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \dot{q}_i + p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \right) dt = 0$$

Mit

$$\int p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} dt = \int p_i \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt = \underbrace{p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}}_{=0} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int \dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt$$

und

$$\delta q_i = d\alpha \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}, \quad \delta p_i = d\alpha \frac{\partial p_i}{\partial \alpha}$$

folgt:

$$\int \sum_i \left\{ \delta p_i \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \delta q_i \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right\} dt = 0$$

Da Variationen  $\delta q$  und  $\delta p$  unabhängig, müssen beide Klammern verschwinden, et voilà:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Fundamentaler Unterschied zu Lagrange:

- Lagrange: Zwar  $q(0)$  und  $\dot{q}(0)$  unabhängige Größen, aber danach  $\dot{q}(t)$  von  $q(t)$  abgeleitete<sup>7</sup> Größe.
- Darum nicht unabhängig variierbar.
- Hamilton:  $q(t)$  und  $p(t)$  gleichberechtigt unabhängig
- Darum einzeln variierbar.

Das ist Unterschied zwischen Dynamik 2. Ordnung im Konfigurationsraum bei Lagrange und Dynamik 1. Ordnung im Phasenraum bei Hamilton

<sup>7</sup>Wortspielverdacht !

## 12.2 Kanonische Transformationen

- Trivialfall der Hamiltonschen Gleichungen: alle Koordinaten sind zyklisch
- Hängt von Wahl der Koordinaten ab. Erinnerung: Pendel, keine zyklischen Koordinaten bei  $q = (x, y, z)$ , aber zyklische Koordinate bei  $q = (r, \varphi, \theta)$
- Ziel: Finde Transformation, so dass möglichst viele Koordinaten (oder gar alle) zyklisch sind

Kanonische Transformation:

- Sei

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q, p, t) \\ P_i &= P_i(q, p, t) \\ H(q, p) &\rightarrow K(Q, P) \end{aligned}$$

- Forderung: Transformation muß die Hamiltonschen Gleichungen invariant lassen, d.h. gilt

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

so gilt auch

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

- Alte und neue Koordinaten müssen

$$\delta \int \left( \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right) dt = 0, \quad \text{resp.} \quad \delta \int \left( \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) \right) dt = 0$$

erfüllen

- Erinnerung: Eichfreiheit der Lagrange-Funktion für  $\frac{d}{dt}M(q, t)$

Wähle hier  $\Phi(q, Q, t)$  (das ist ein Spezialfall)

- Damit

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) + \frac{d}{dt}\Phi(q, Q, t)$$

- Setze

$$\frac{d}{dt}\Phi(q, Q, t) = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

ein:

$$\sum_i \left( p_i - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i = \sum_i \left( P_i + \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \right) \dot{Q}_i + H - K + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Gleichung erfüllt, wenn

$$p_i = \frac{\partial \Phi(q, Q, t)}{\partial q_i} \quad (50)$$

$$P_i = -\frac{\partial \Phi(q, Q, t)}{\partial Q_i} \quad (51)$$

$$K = H + \frac{\partial \Phi(q, Q, t)}{\partial t} \quad (52)$$

Gleichungen aufgelöst ergibt:

$$Q_i = Q_i(q, p, t) \quad (53)$$

$$P_i = P_i(q, p, t) \quad (54)$$

$$H(q, p) \rightarrow K(Q, P)$$

$\Phi(q, Q, t)$  heißt Erzeugende der Transformation

Beispiel

- Harmonischer Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + m\omega^2 q^2 \quad (55)$$

Wähle klug:

$$\Phi(q, Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q$$

Mit Gln. (50, 51)

$$p = \frac{\partial \Phi(q, Q)}{\partial q} = m\omega q \cot Q \quad (56)$$

$$P = -\frac{\partial \Phi(q, Q)}{\partial Q} = \frac{m\omega}{2} \frac{q^2}{\sin^2 Q} \quad (57)$$

- Aus Gl. (57):

$$q = \sqrt{\frac{2}{m\omega}} \sqrt{P} \sin Q \quad (58)$$

Damit aus Gl. (56)

$$p = \sqrt{2m\omega} \sqrt{P} \cos Q \quad (59)$$

- Eingesetzt in  $H$ , Gl. (55)

$$K = \omega P$$

- Resultat:  $Q$  ist zyklisch.

$$P = \text{const}, \quad Q = \omega t + \beta$$

- Rückeingesetzt in Gln. (58, 59) gibt das bekannte Resultat
- Bemerkung:  $Q_i, P_i$  müssen nichts mehr von "Orten" und "Impulsen" an sich haben.

Für

$$\Phi(q, Q) = \sum_i q_i Q_i \quad \text{gilt} \quad Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i$$

## 12.3 Hamilton-Jacobi

Der einfachste Hamiltonian ist der, der identisch verschwindet

- Dann gilt

$$Q_i = \text{const}_1, \quad P_i = \text{const}_2$$

Die kanonische Transformation, die dieses leistet sei  $W(q, Q, t)$

- Mit Gl. (52) gilt

$$\frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial t} + H(q, p, t) = 0$$

Mit Gl. (50) und  $Q_i = \text{const}$ , folgt für  $W(q, Q, t) = W(q, t) = W$ :

Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung für  $W$ :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_f}\right) = 0$$

- Betrachte zeitunabhängigen Hamiltonian
- Folge:  $W$  linear in  $t$ :

$$W(q, t) = S(q) - Et, \quad W \text{ wie Wirkung}$$

Hamilton-Jacobi:

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}\right) = E$$

- Geometrische Interpretation in kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$

$$W(x, y, z, t) = S(x, y, z) - Et$$

- $S = \text{const}$  bedeutet feste Fläche im Raum, verschiedene Konstanten geben

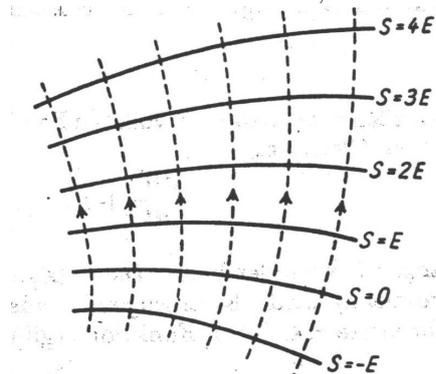


Abb. 66

verschiedene Flächen

$W = \text{const}$  bedeutet bewegte Fläche im Raum

Fläche  $W = \text{const}$  wandert über Flächen  $S = E, 2E, \dots$

Analogie zu Welle mit  $\sin(kx - \omega t)$

- Wellenphänomen, Wirkungswellen

- Impuls

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{\partial S}{\partial x_i}$$

In Vektorform

$$\vec{p}_i = \vec{\nabla} W = \vec{\nabla} S$$

ZEICHNUNG

Bahnkurven sind orthogonale Trajektorien<sup>8</sup> der Wellenflächen  $W = \text{const}$ , bzw.  $S = \text{const}$ .

- Hamilton-Jacobi + Eikonal-Gleichung (next Semester Elektrodynamik)  $\implies$  Schrödinger-Gleichung.

12. Mo.

## 12.4 Integrable Systeme und Hamiltonsches Chaos

- Erinnere Zwei-Körper-Problem, Starrer Körper, Sphärisches Pendel:
- Lösungen jeweils Schwingungen
- Grund: Durch Erhaltungsgrößen "Erste Integrale"
- ZEICHNUNG

Man kann zeigen:

Existieren für ein System mit  $p$ -dimensionalen Phasenraum  $p/2$  Erhaltungsgrößen  $E_i$ , für die gilt

$$\{E_i, E_j\} = 0, \quad \forall i, j$$

so ist das System integrabel und die Lösungen stellen Schwingungen dar. Lösung lebt auf (deformiertem) Torus.

Beispiel 1:

- Konservative Bewegung in einer Dimension  
Nutze Energieerhaltung

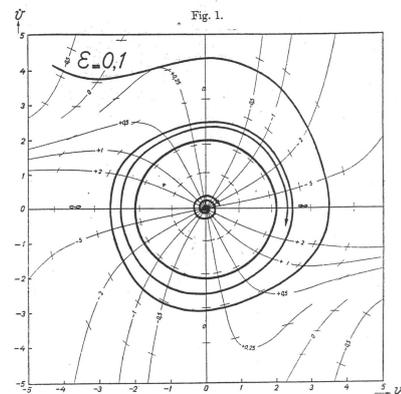
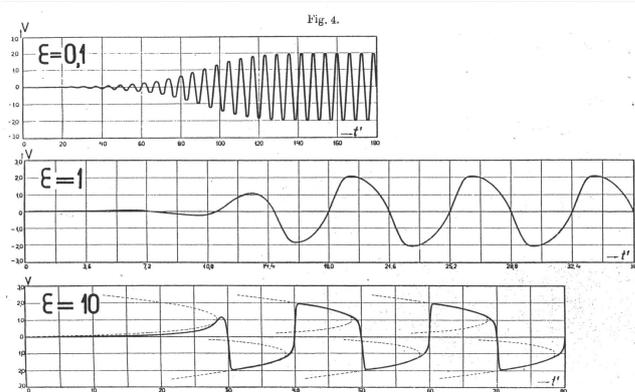
$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) = E = \text{const}$$

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2/m(E - U(x(t)))}$$

"Erstes Intregral"

$$\int_{t_0}^t \frac{\dot{x} dt'}{\sqrt{2/m(E - U(x(t)))}} = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{2/m(E - U(x'))}} = \int_{t_0}^t dt' = t - t_0$$

- Ergibt:  $x = x(t; E, x_0)$ ,  $v_0 = \sqrt{2/m(E - U(x_0))}$
- Dimension Phasenraum: 2
- Erhaltungsgröße: 1



Beispiel 2:

- Zwei-Körper-Problem  
Dimension Phasenraum: 12  
6 Erhaltungsgrößen
  - Energie  $E$
  - Gesamtimpuls  $\vec{P}$
  - Drehimpulsbetragsquadrat  $\vec{L}^2$
  - $z$ -Komponente des Drehimpulses  $L_z$ . Bemerkung, warum nicht  $\vec{L}$

Folgt: Integrabel

Gegenbeispiel:

- Drei Körper Problem (Poincaré um 1900)
- Dimension Phasenraum: 18
- Anzahl Erhaltungsgrößen: 6
- Bewegung nicht auf Torus
- Bewegung kann chaotisch sein:  
Kleinste Änderungen der Anfangswerte kann zu sehr verschiedenen Trajektorien führen

Warum dann aber Sonnensystem so stabil ?

Theorem vom Kolmogorov, Arnol'd, Moser (KAM-Theorem, 1940)

Fußgänger-Version

- Betrachte integrables System mit Hamilton-Funktion  $H_0$
- "Schalte" Hamiltonsche Störung "sachte" hinzu, ergibt kleine Störung  $H_1$   
Gesamt Hamiltonian:

$$H = H_0 + \epsilon H_1$$

- Beispiel für Störungstheorie

- Betrachte ungestörtes System
- Löse seine Bewegungsgleichung, hier: Bewegung auf Torus
- Untersuche Auswirkung von Störung
  - \* Parametrisiere Störungsstärke mit  $\epsilon$
  - \* Untersuche Auswirkung in Abhängigkeit von  $\epsilon$
- Anwendungsbereich: Praktisch alles jenseits des harmonischen Oszillators und Zwei-Körper-Problem, d.h. ubiquitär
- Beispiele
  - \* Klassische Mechanik & QM : Anharmonischer Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 + \epsilon q^4$$

- \* StatPhys: Ideales Gas  $\iff$  Reales Gas

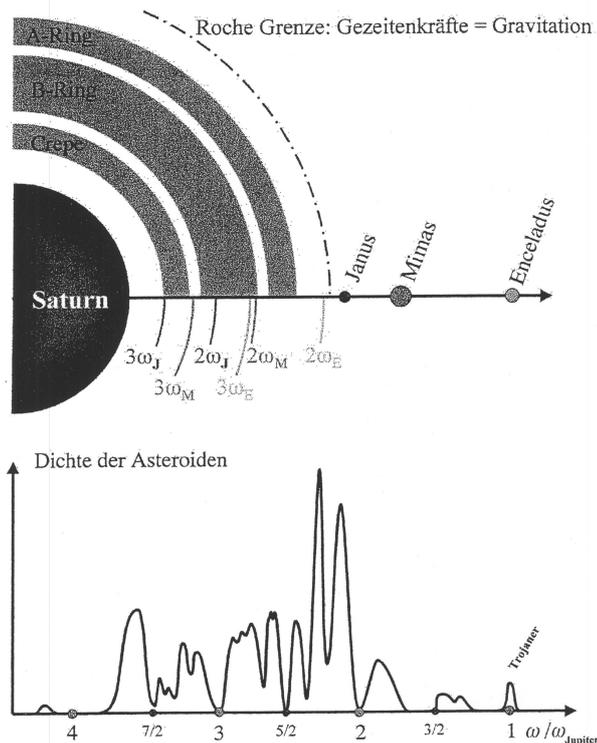
- Ergebnis hier:

Torus des ungestörten Systems wird nicht notwendiger Weise zerstört, sondern eventuell erst nur deformiert.

Zerstörung hängt ab von

- Stärke der Störung
- Frequenzverhältnis des ungestörten Systems zur Störung, je irrationaler, desto stabiler

- Beispiel Jupiter-Ringe und Asteroiden-Ringe, Trojaner, Librationspunkte



Lessons learnt:

- Variationsrechnung macht fundamentalen Unterschied Lagrange zu Hamilton klar
- Kanonische Transformationen führen zu Hamilton-Jacobi
- Welleninterpretation von Hamilton-Jacobi  $\implies$  Schrödinger Gleichung
- Gibt es  $\dim(\text{Phasenraum})/2$  Erhaltungsgrößen, lebt das System auf Torus
- Sonst kann es chaotisch sein
- Good News: Muss es aber nicht ("sofort")

## 13 13. Woche: Dissipative Systeme

- Bisher im Zentrum: Konservative, Hamiltonsche Systeme
- Beschreiben abgeschlossene Systeme, i.e. kein Energieaustausch mit Umwelt
- Ausnahmen (offene Systeme):
  - Pendel mit veränderlichem Aufhängepunkt & Pendellänge (Schaukel).
  - Dissipative Systeme mit Reibung  $\propto -h(|\vec{v}|)\vec{v}$ :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{q}(t) = 0$

Jetzt dissipative Systeme mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{q}(t) \neq const$

### 13.1 Grenzyklen

Van der Pol Oszillator (1926):

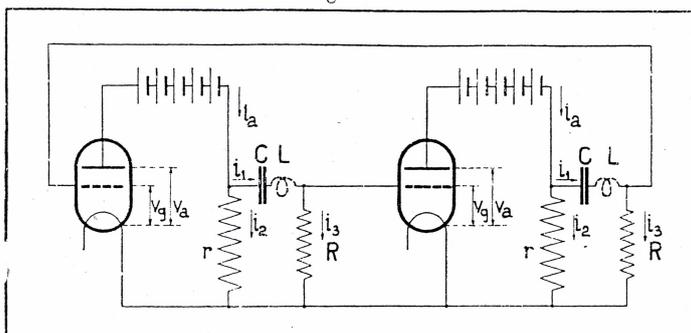
$$\ddot{x} = \mu(1 - x^2)\dot{x} - \omega_0^2 x, \quad \mu > 0.$$

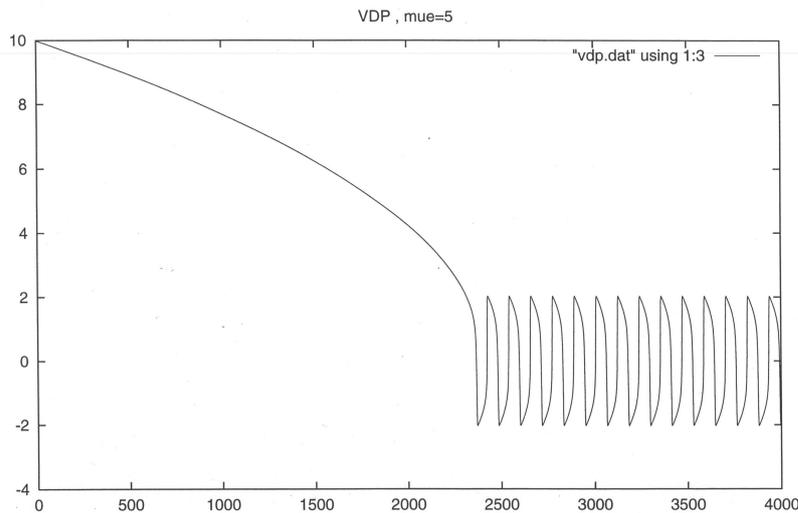
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \mu(1 - x_1^2)x_2 - \omega_0^2 x_1$$

mit  $x_1$  Ort und  $x_2$  Geschwindigkeit.

Beschreibt Schwingkreis mit nichtlinearer Triode





Der Effekt:

$x^2$ -Term:

- $x^2 < 1$ : negative Dämpfung: System nimmt Energie auf (Batterie)
- $x^2 > 1$  Dämpfung wird aktiv: System gibt Energie ab (Widerstand)

(Lokale) Stabilitätsuntersuchungen:

- Fixpunkt:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}^*) = 0$$

Für van der Pol:

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= \mu(1 - x_1^2)x_2 - \omega_0^2 x_1 \end{aligned}$$

Fixpunkt:  $x_1^* = x_2^* = 0$

- Stabilität des Fixpunktes: Linearisiere Dynamik um Fixpunkt

Mit

$$x_1 = x_1^* + \tilde{x}_1, \quad x_2 = x_2^* + \tilde{x}_2$$

$$(x_1^* + \tilde{x}_1) = \dot{x}_1 + \dot{\tilde{x}}_1 = f_1(x_1^* + \tilde{x}_1, x_2^* + \tilde{x}_2) \approx f_1(x_1^*, x_2^*) + \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} \tilde{x}_1 + \frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \tilde{x}_2 + O(\tilde{x}^2)$$

$$(x_2^* + \tilde{x}_2) = \dot{x}_2 + \dot{\tilde{x}}_2 = f_2(x_1^* + \tilde{x}_1, x_2^* + \tilde{x}_2) \approx f_2(x_1^*, x_2^*) + \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} \tilde{x}_1 + \frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \tilde{x}_2 + O(\tilde{x}^2)$$

Ergibt mit  $\vec{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$

$$\dot{\vec{\tilde{x}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \Big|_{x^*} \vec{\tilde{x}} = A \vec{\tilde{x}} \quad \text{lineares System}$$

- Lösung:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0)e^{At}, \quad e^{At} = 1 + At + \frac{1}{2}A^2t + \dots$$

Die Eigenwerte  $\lambda_{1,2}$  von  $A$  legen das qualitative Verhalten fest:

$$\tilde{x}_1(t) = a_1 e^{Re(\lambda_1)t} \cos(Im(\lambda_1)t + \phi_1) + a_2 e^{Re(\lambda_2)t} \cos(Im(\lambda_2)t + \phi_2)$$

- Allgemein:
  - Alle Realteile negativ: stabil
  - Eigenwerte reell: rein exponentiell
  - Eigenwerte complex: Spirale
  - Eigenwerte rein imaginär: Wirbel

Mit Skizze Phasenraum und Zeitraum

Realteile	Imaginärteile	Bezeichnung
-, -	0	stabiler Knoten
+, +	0	instabiler Knoten
+, -	0	Sattelpunkt
-, -	$\neq 0$	Stabiler Strudel
+, +	$\neq 0$	Instabiler Strudel
0, 0	$\neq 0$	Wirbel

12. Mi.

Für van der Pol:

- Fixpunkt:

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= \mu(1 - x_1^2)x_2 - \omega_0^2 x_1 \end{aligned}$$

bei (0,0).

- 

$$A = \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right|_{x^*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & \mu - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda\mu + \omega_0^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \omega_0^2}$$

- Realteile positiv, Fixpunkt ist abstoßend
- $\mu < 2\omega_0$  komplex,  $\mu \geq 2\omega_0$  reell

ZEICHNUNG dazu

Globales Verhalten

$x^2$ -Term:

- $x^2 < 1$ : negative Dämpfung: Fixpunkt bei (0,0) abstoßend
- $x^2 > 1$  Dämpfung wird aktiv
- Folge: Attraktor, in diesem Falle: ein Grenzyklus  
Unabhängig von Startwerten nähert sich jede Trajektorie einer eindimensionalen invarianten Menge. Potentialinterpretation.
- Liouville-Theorem nicht erfüllt. Phasenraumvolumen wird vernichtet. Von zwei Dimensionen auf eine Dimension.

ZEICHNUNG dazu

- Physikalisch: Offenes System  
Nicht im Gleichgewicht mit der Umgebung
  - Kleine Amplitude: Energie fließt rein
  - Große Amplitude: Energie wird dissipiert

Vergleich: Hamiltonsches System: Harmonischer Oszillator

- Dynamik

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 \end{aligned}$$

- Fixpunkt: (0,0)
- Stabilität

$$A = \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right|_{x^*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \omega_0^2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$

- Störe die Form der Dynamik leicht:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & \text{nach } (1 + \epsilon_1)x_2 - \epsilon_2 x_1 + \epsilon_3 x_1 x_2 + \epsilon_4 x_1^2 x_2 + \dots \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 & \text{nach } -(\omega_0^2 + \epsilon_5)x_1 + \dots \end{aligned}$$

bis auf Nullmengen der Störungen  $\implies A_{11}, A_{22} \neq 0$

und damit

$$\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) \neq 0$$

- Also:  
Die (integrable Hamilton'sche) Wirbel-Lösung ist nicht stabil unter allgemeinen kleinen Parameteränderungen.
- ZEICHUNG: Deformation der Wirbel
- ZEICHUNG: Deformation der stabilen Strudel
- Folge des Theorems von Liouville: Hamilton'sche Systeme können keine Grenzyklen bilden
- Poincaré-Bendixson Theorem:  
In zwei dimensional Systemen kann es nur Fixpunkte oder periodisches Verhalten geben  
Beweis: Eindeutigkeit der Trajektorien

## 13.2 Chaotische Systeme

An einem Beispiel:

Lorenz (1963) Deterministic nonperiodic flow. J. Atmos. Sci.

- Lorenz wollte die Schwierigkeit der Wettervorhersage verstehen.
- Er suchte nach Trajektorien, die nicht gut durch lineare Oszillationen vorher-sagbar sind.
- Diese sollten möglichst aperiodisch aussehen.

Die Atmosphäre vereinfacht

- Quader
- von unten (Erdoberfläche) geheizt
- von oben (Weltraum) gekühlt
- darin Fluid, im wesentlichen Wasserdampf
- Rayleigh-Bénard Konvektions Experiment

ZEICHNUNG Rayleigh-Bénard Experiment, Rollen

Widerstrebende Kräfte

- Leicht unten vs. schwer oben
- Wärmeleitung vs. Konvektion

Herleitung des Lorenz-Systems

Man nehme

- die Navier-Stokes Gleichungen, Newton für Hydrodynamik

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{\nabla}p + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}, \quad \rho \text{ Dichte, } p \text{ Druck, } \nu \text{ Viskosität}$$

auf ersten Blick linear, aber mit

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

die Substantielle Ableitung, die die wesentliche Nichtlinearität enthält

- die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \vec{\nabla}^2 T \quad \kappa \text{ Wärmeleitfähigkeit}$$

- und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

- Viel Technik
- Einführen einer Fouriermodenentwicklung mit Beibehalten der Terme niedrigster Ordnung.

Das führt auf die Lorenz Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -y + x(r - z) \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

$\sigma$ : Prandtl Zahl: Viskosität  $\nu$ /Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$

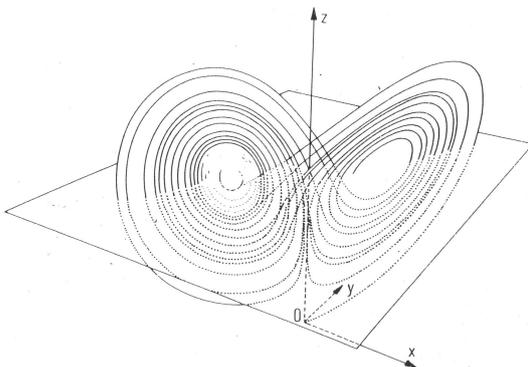
$b$ : typische Längenskala, (Breite einer Rolle)/(Höhe des Fluids)

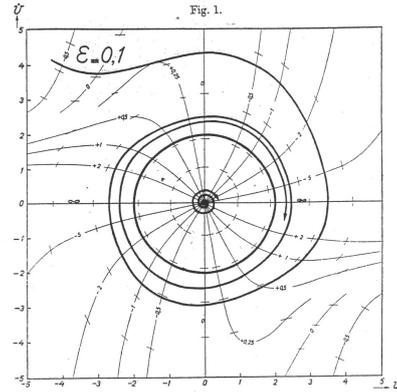
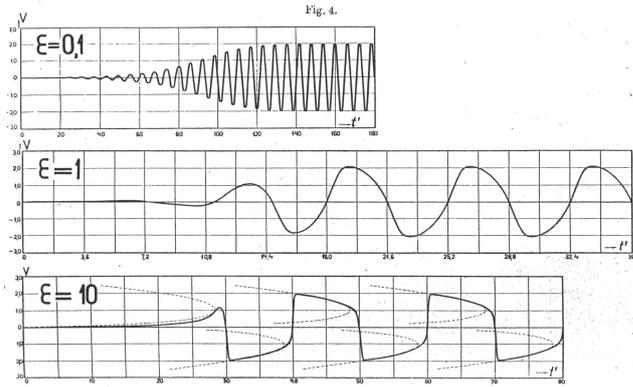
$r$ : proportional zur Rayleighzahl  $\sim (1/\kappa\nu) \Delta T$  (externe Energie)/(interne Dissipation), der Kontrollparameter

$x$ : proportional zur Konvektionsgeschwindigkeit

$y$ : proportional zur Temperaturdifferenz zwischen aufsteigender und fallender Strömung

$z$ : proportional zur Abweichung vom linearen Temperaturverlauf.





$x, y$ -Komponente ist Ohrenwechsel-Chaos  
 $z$ -Komponente ist Amplituden-Chaos

(Wahre) Anekdote:

- Lorenz ließ Simulation laufen.
- Ergebnis sah komisch aus.
- ließ über's Mittagessen noch mal mit etwas weniger Genauigkeit der Startwerte laufen.
- Ergebnis: Völlig verschiedene Trajektorie.

für  $\sigma = 10, b = 8/3, r = 42$

$$x(0)=4.032273$$

$$y(0)=5.984860$$

$$z(0)=15.896503$$

und

$$x(0)=4.0322$$

$$y(0)=5.9848$$

$$z(0)=15.896$$

”Schmetterlingseffekt”

- Lorenz suchte nach deterministischen Trajektorien, die nicht gut mit linearen Oszillatoren vorhersagbar sind.
- Diese sollten möglichst aperiodisch sein.
- Was er fand war, daß diese aperiodischen Lösungen sensitiv von den Anfangsbedingungen abhängen.

Für das Phasenraum-Volumen von Dynamischem System  $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$  gilt allgemein:

$$\frac{dV}{dt} = \int_V d^d x \operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) = \int_V d^d x \sum_{i=1}^d \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

Für Hamilton'sche System gilt  $dV/dt = 0$ , für dissipative  $dV/dt < 0$ . Für das Lorenzmodell

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -y + x(r - z) \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

gilt

$$\frac{dV}{dt} = -(\sigma + 1 + b)V < 0, \quad (\sigma > 0, b > 0)$$

oder:

$$V(t) = V(0) e^{-(\sigma+1+b)t}$$

$e^{-(\sigma+1+b)} \approx 10^{-6}$ , also ganz schön heftig.

”Lebensraum” des Systems

- Nicht 3D
- Nicht effektiv 2D, Poincaré-Bendixson Theorem: Periodisch
- Dimension 2.06, Fraktaler Attraktor

**Definition Chaos** (Wortschöpfung Li&Yorke 1975): Beschränktes, aperiodisches Verhalten eines deterministischen Systems mit empfindlicher Abhängigkeit der Trajektorien von den Anfangsbedingungen.

Führt in der Regel zu fraktalen Attraktoren

Lessons learnt:

- Dissipative Systeme: Phasenraumvolumen nicht erhalten
- Grenzyklen: Dissipative Systeme mit periodischem Attraktor
- Chaotische Systeme mit sensitiver Abhängigkeit der Trajektorien von den Anfangsbedingungen und fraktalen Attraktoren

### 13.3 Abschlußbemerkungen

Fragen:

- Wer hat Script genutzt ?
- Wer hat mitgeschrieben ?

Prüfungstipps geben