

---

# Theoretische Physik IV: Statistische Physik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer, WS 2017/18)

## Aufgabenzettel Nr. 11

Abgabe am Freitag, den 12.1.18 nach der Vorlesung. Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name des Tutors und Ihrem Namen deutlich lesbar beschriften.

---

### Aufgabe 1: Gestörter Kristall

(4 Pkt.)

$N$  Atome bilden einen perfekten Kristall. Ein gestörter Kristall mit  $n$  sogenannten Frenkelfehlstellen entsteht, wenn  $n$  Atome ( $1 \ll n \ll N$ ) aus dem Kristallverband entfernt und auf Zwischengitterplätze gebracht werden. Die Gesamtzahl der Zwischengitterplätze sei  $N'$ , weiterhin seien  $N$  und  $N'$  von der selben Größenordnung. Die Energie, die aufgewendet werden muss, um ein Atom von einem Gitterplatz auf einen Zwischengitterplatz zu verschieben, sei  $\epsilon$ .

- i.) Berechnen Sie die Anzahl der Konfigurationen und bestimmen Sie daraus die Entropie. Verwenden Sie dabei die Stirling-Formel. (2 Pkt.)
- ii.) Bestimmen Sie die freie Energie und zeigen Sie, dass im thermodynamischen Gleichgewicht gilt

$$n \approx \sqrt{NN'} \exp\left(-\frac{\epsilon}{2kT}\right).$$

(2 Pkt.)

### Aufgabe 2: Additivität der Entropie

(2 Pkt.)

Betrachten Sie ein aus  $N$  Subsystemen bestehendes System mit Dichteoperator  $\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}$  und Zustandssumme  $Z = \text{Sp}(e^{-\beta H})$ . Zeigen Sie, dass aus  $H = \sum_{i=1}^N H_i$ , wobei  $H$  den Hamiltonoperator des Gesamtsystems bezeichne,

$$S = \sum_{i=1}^N S_i$$

folgt. *Hinweis:*  $S = -k_B \text{Sp}(\rho \log \rho)$ . Beachten Sie bei der Spurbildung, wie sich die Orthonormalsysteme  $\mathcal{B}_i = \{|n_i\rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$  der Einzelsysteme zu einem Orthonormalsystem des Gesamtsystems kombinieren.

### Aufgabe 3: Ideales Gas im Magnetfeld

(6 Pkt.)

Betrachten Sie ein ideales Gas in einem statischen Magnetfeld  $\vec{H}$ . Die Energie eines einzelnen Atoms ist durch

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m_A} - \vec{m} \cdot \vec{H}$$

gegeben, wobei  $p$  der Impuls,  $m_A$  die Masse und  $\vec{m}$  das magnetische Moment des Atoms sind. Die Richtung von  $\vec{m}$  kann sich beliebig ändern und soll als gleichverteilt angenommen werden.

- i.) Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme, die freie Energie  $F(T, N, V, H)$  und das chemische Potential des Gases. *Hinweis:* Verwenden Sie die Stirlingsche Näherung. (4 Pkt.)
- ii.) Das Gas befinde sich in einem Behälter, in dessen linker Hälfte ein konstantes Magnetfeld herrscht, während die rechte Hälfte feldfrei ist. Wie verhalten sich die Dichten in linker und rechter Hälfte im thermodynamischen Gleichgewicht zueinander? (2 Pkt.)

#### Aufgabe 4: Atome auf Oberflächen

(5 Pkt.)

Ein ideales Gase ( $N$  Atome, Temperatur  $T$  und Druck  $p$ ) befinde sich im Kontakt mit einer Oberfläche, an der sich unter Energiegewinn ( $\varepsilon$  pro Atom) Atome anlagern können. Die Oberfläche bestehe aus einem Gitter mit  $M$  möglichen Anlagerungspunkten. Jeder dieser Punkte kann nur durch ein Atom besetzt werden. Berechnen Sie die Zahl  $N'$  der an der Oberfläche gebundenen Atome als Funktion von  $p$  und  $T$ .

*Hinweis:* Welche ist die passende Gesamtheit? Nutzen Sie die Gleichheit der chemischen Potentiale auf der Oberfläche und im Gas im thermodynamischen Gleichgewicht,  $\mu_{\text{Gas}} = \mu_{\text{Gitter}}$ . Vereinfachen Sie die Zustandssumme für das Gitter mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes.

#### Münsteraufgabe

Was stellt in vielhundertfacher Weise eine Beziehung des Münsters zu Bagdad dar? Tipp: Betrachten Sie die Heiligenfiguren.