

Skript zur Vorlesung :

**Theoretische Physik I:
Einführung in die mathematischen Methoden der
Theoretischen Physik und Newton'sche Mechanik**

Vorlesung WS 13/14

Prof. Dr. Jens Timmer

February 11, 2014

Contents

0	Einleitung	4
1	Taylor-Entwicklung	5
2	Komplexe Zahlen	12
3	Vektoren	17
3.1	Gruppen und Körper	19
3.2	Vektorräume	20
3.3	Skalarprodukt	23
3.4	Kreuzprodukt	27
3.5	Spatprodukt	30
4	Lineare Abbildungen	32
4.1	Abbildungen	32
4.2	Lineare Abbildungen	33
4.3	Matrizen	33
4.4	Der duale Vektorraum	40
4.5	Determinanten	45
4.6	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	48
4.7	Eigenwerte und Eigenvektoren	50
4.8	Spezielle Matrizen	54
4.9	Diagonalisierung von Matrizen	58
5	Newton'sche Mechanik	63
5.1	Die Newton'schen Gesetze	64
5.2	Kraftgesetze ermitteln	68
5.3	Wichtige Kraftgesetze	69
5.4	Erhaltungssätze	72
6	Vektoranalysis	74
6.1	Felder, Kurven und Flächen	74
6.2	Integration in mehreren Variablen	75
6.3	Partielle und totale Ableitung	85
6.4	Ableitungen von Feldern	86
6.5	Integralsätze	91
6.6	Konservative Felder	92

6.7	Gravitationsgesetz	99
6.8	Die Kontinuitätsgleichung	103
7	Differentialgleichungen	107
7.1	Analytische Lösungen	109
7.2	Numerische Lösungen	118
8	Lineare Schwingungen	121
8.1	Eindimensionale Systeme	121
8.2	Der allgemeine ungedämpfte harmonische Fall	127
8.3	Zwei Beispiele	133
9	Fourier-Transformation	138
9.1	Kontinuierliche Fourier-Transformation	138
9.2	Fourier-Reihen	140
10	Dirac'sche Delta-Distribution	143
11	Danksagung	147

0 Einleitung

Org-Krams:

- Zusammensetzung der Hörschaft
- Einordnung der Vorlesung
- Übungen Do. auf Do., wer braucht sie in Hardware ? Viele Stunden darauf verwenden. Nicht versuchen es mit Google zu lösen. Wird zu Katastrophe führen.
Abgeben in 2er-Gruppen.
- Wer braucht Prüngsleistung, Klausur, mündliche Prüfung ?
- Scheinkriterium
- FOLIE Inhaltsverzeichnis
- Bemerkung Vektorpfeile und Nomenklatur
- Fragen bei Unklarheiten, Studentenevaluation
- Bitte pünktlich kommen, Handys aus
- Hermeneutisches Problem
- Skript

Literatur:

- K. Meyberg, P. Vachenauer. Höhere Mathematik 1
- W. Nolting. Theoretische Physik 1: Klassische Mechanik
- R. Feynman. Feynman Lecture, Band 1

Klassische Mechanik ist grundlegend für

- gesamte Physik
 - Formaler Rahmen der klassischen Physik
 - Grundlage und Unterschied Quantenmechanik
 - Unterschied Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie
- Technik: Maschinen- und Brückenbau

1 Taylor-Entwicklung

Motivation:

Wie erhält man ohne Computer einen brauchbaren Wert von $\sin(1)$?

- Antwort: Approximiere $\sin(x)$ durch Polynom 5. Grades, nämlich

$$\sin(x) \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} =: P_5(x)$$

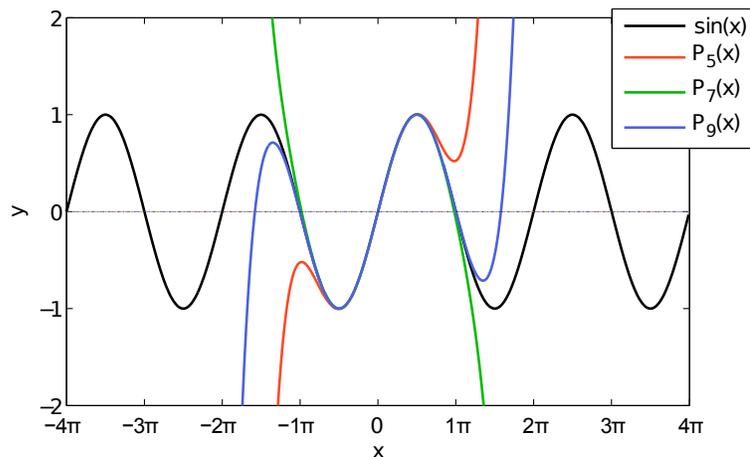
Ergibt für $x = 1$:

$$\sin(1) \simeq 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{101}{120} = 0.841666\dots$$

- Wahrer Wert: $\sin(1) = 0.8414709\dots$ Fehler kleiner als $1/1000$
- Näherung wird durch höhere Polynom-Ordnung immer besser

$$\sin(x) \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} =: P_7(x)$$

$$\sin(x) \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} =: P_9(x)$$



FOLIE

- Wir werden sehen:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Bedeutung:

- Ist eine Funktion hinreichend glatt, d.h. häufig genug differenzierbar, so läßt sich das globale Verhalten aus dem lokalen Verhalten beschreiben.

Approximation:

- Man kann zeigen: Für jedes fest vorgegebene $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, und zwar gegen $\sin(x_0)$.
- Anders ausgedrückt:

Sei

$$P_N(x) := \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es eine Zahl \bar{N} , so dass gilt:

$$|\sin(x_0) - P_N(x_0)| < \epsilon \quad \forall N \geq \bar{N}$$

- Interpretation:
Approximation durch Polynome mit jeder gewünschten Genauigkeit.
- Approximation durch Polynome ist günstig, da diese am einfachsten zu differenzieren und integrieren sind.

Formaler:

- Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f'(x) dx = f(x_0+h) - f(x_0) \quad (1)$$

- Substituiere mit $x = x_0 + h - t$
- Erinnere Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

Ergibt

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f'(x)dx = \int_h^0 f'(x_0 + h - t) \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=-1} dt = \int_0^h f'(x_0 + h - t)dt$$

- Erinnere partielle Integration:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

- Partiiell integrieren, $f \rightarrow f'$, $g' \rightarrow 1$ liefert, innere Ableitung nicht vergessen:

$$\begin{aligned} \int_0^h f'(x_0 + h - t)dt &= [f'(x_0 + h - t)t]_0^h - \int_0^h f''(x_0 + h - t)(-1)t dt \\ &= f'(x_0)h + \int_0^h f''(x_0 + h - t)t dt \end{aligned}$$

Nochmal partiell integrieren

$$\begin{aligned} \int_0^h f'(x_0 + h - t)dt &= f'(x_0)h + \left[f''(x_0 + h - t) \frac{t^2}{2} \right]_0^h \\ &\quad + \int_0^h f'''(x_0 + h - t) \frac{t^2}{2} dt \\ &= f'(x_0)h + f''(x_0) \frac{h^2}{2} + \int_0^h f'''(x_0 + h - t) \frac{t^2}{2} dt \end{aligned}$$

- Ergo, mit Gl. (1) und weiterem partiellen Integrieren:

$$\begin{aligned}
f(x_0 + h) - f(x_0) &= f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + \int_0^h f'''(x_0 + h - t)\frac{t^2}{2}dt \\
&= \dots = f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + f'''(x_0)\frac{h^3}{2 \cdot 3} + \dots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + \dots \\
f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + f'''(x_0)\frac{h^3}{2 \cdot 3} + \dots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + \dots
\end{aligned}$$

$$f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) h^n \quad (2)$$

- Grundsätzliche Voraussetzung: $f(x)$ beliebig häufig differenzierbar
- Ist $f(x)$ ein Polynom, bricht die Reihe nach endlich vielen Termen ab
- Konvergenz der Reihe Gl. (2) nicht notwendig gesichert.

Konvergenzverhalten

- Definition: Sei $f(x)$ hinreichend oft differenzierbar.
Dann ist

$$T_N(x_0, x) := \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

das N -te Taylor-Polynom von $f(x)$ am Punkt x_0 .

- Es gilt

$$f(x) = T_N(x_0, x) + R_{N+1}(x)$$

mit dem Restglied

$$R_{N+1}(x) = \frac{1}{N!} \int_{x_0}^x dt f^{(N+1)}(t) (x - t)^N$$

- Satz: Lagrange'sche Form des Restglieds

$\exists \xi$ zwischen x_0 und x , so dass für das Restglied gilt:

$$R_{N+1}(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} (x - x_0)^{N+1}$$

Beweis per Mittelwertsatz der Integrationsrechnung, siehe Übung

Es gibt drei Möglichkeiten:

- $R_{N+1}(x)$ divergiert für $N \rightarrow \infty \implies T(x_0, x)$ divergiert :-)
- $R_{N+1}(x)$ konvergiert gegen $R(x) \neq 0 \implies T(x_0, x)$ konvergiert, aber nicht gegen $f(x)$:-)
- $R_{N+1}(x)$ konvergiert gegen $R(x) = 0 \implies T(x_0, x)$ konvergiert gegen $f(x)$:-)

Dann heißt Funktion analytisch.

Beispiele

- Sinus, Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

Erinnere:

$$\sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

Ergibt:

$$\sin^{(0)}(0) = 0, \sin^{(1)}(0) = 1, \sin^{(2)}(0) = 0, \sin^{(3)}(0) = -1, \sin^{(4)}(0) = 0, \sin^{(5)}(0) = 1, \dots$$

Damit:

$$T_\infty(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (-1)^n x^{2n+1}$$

Man kann zeigen: Fall c) $\implies \sin(x) = T_\infty(0, x)$

- Cosinus

Analog zu Sinus, Übung

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-1)^n x^{2n}$$

Fall c)

- Exponentialfunktion, Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

Es gilt

$$\exp^{(n)}(x) = \exp(x), \quad \text{insbesondere } \exp^{(n)}(0) = \exp(0) = e^0 = 1$$

Damit

$$T_\infty(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp^{(n)}(0)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Fall c)

- Betrachte

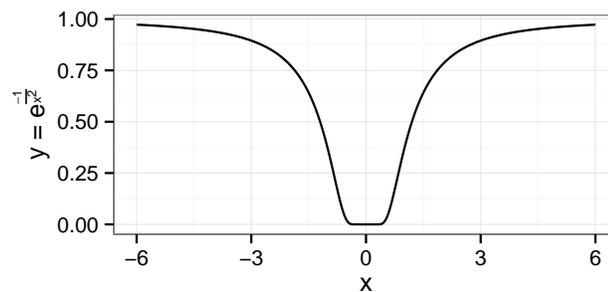
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$T_\infty(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = 1 - x^2 + x^4 - \dots$$

Fall c) für $|x| < 1$ und Fall a) für $|x| > 1$

- Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Man kann zeigen, Übung

$$f^{(n)}(0) = 0$$

und damit

$$T_{\infty}(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$$

Fall b)

Bedeutung der Taylorentwicklung nicht zu unterschätzen

- Nichtlineare Abbildungen lassen sich linearisieren, respektive "polynomisieren".
- Kraftgesetze lassen sich häufig für kleine Auslenkungen gut durch die Approximation in erster Ordnung beschreiben. Ergibt lineare Kraftgesetze wie beim Pendel, siehe Kapitel 8
- Energieminima lassen sich lokal gut durch die 2. Ordnung beschreiben.
- Numerische Integration von Differentialgleichung, siehe Kapitel 7.2
- Numerische Optimierungsverfahren
- Suche "Taylor" im Skript :-)

Hier nur Taylor-Entwicklung für reell-wertige Funktionen einer reellen Variable. Verallgemeinerung natürlich.

Lessons learned:

- Für "vernünftige" Funktionen gilt: Das globale Verhalten ist durch das lokale bestimmt
- Diese lassen sich durch Potenzreihen Taylor-entwickeln
- Abbruch der Taylor-Entwicklung nach erster Ordnung linearisiert die Funktion
- Taylorpolynome: Polynome vom Grade n , die bis zur n -ten Ableitung an der Stelle x_0 mit f übereinstimmen
- Taylor-entwickeln: Häufigste Tätigkeit eines Physikers

2 Komplexe Zahlen

Motivation:

Obwohl alle physikalischen Messgrößen reell sind, erweist sich das Rechnen mit komplexen Zahlen als (i) praktisch und (ii) einsichtsreich.

- Im Rahmen der reellen Zahlen besitzt die Gleichung

$$x^2 = -1 \tag{3}$$

keine Lösung, ebenso wie

$$x^2 = 2 \tag{4}$$

im Rahmen der rationalen Zahlen keine Lösung besitzt.

- So, wie man $\sqrt{2}$ als Lösung von Gl. (4) definiert und damit die reellen Zahlen \mathbb{R} inspiriert, definiert man i als Lösung von Gl. (3).
- Man erhält die komplexen Zahlen:

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Rechenregeln:

- $z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$ (*)
- Komplexe Konjugation: $z^* \equiv (a + ib)^* = a - ib$
- Betrag: $|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Realteil: $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$
- Imaginärteil: $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)$

ZEICHNUNG für die letzten vier Fälle

Exponentialfunktion im Komplexen

- Exponentialfunktion für reelle Zahlen in Potenzreihenentwicklung:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

Definiere analog im komplexen

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

- Betrachte rein imaginäre Argumente

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n x^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

wegen

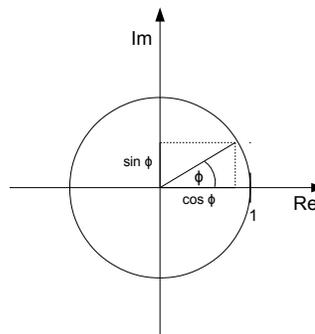
$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i$$

folgt

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-1)^n x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (-1)^n x^{2n+1}$$

- Vergleich mit den Taylorreihen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ ergibt die Euler'sche Gleichung

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$



1. Wo.

Anwendungen der Euler'schen Gleichung:

- Sie ist dienlich zum Beweis von Additionstheoremen, siehe Übung
- Kürzeste Gleichung, die fünf fundamentale Zahlen enthält

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

- Darstellung komplexer Zahlen in Polarkoordinaten

$$z = |z|e^{i\phi}, \quad \text{mit Betrag } |z| \text{ und Phase } \phi$$

Dies ist nützlich bei der Beschreibung von Oszillationen mit Amplitude A und Phase $\phi = \omega t$

$$x(t) = A \cos \omega t = \operatorname{Re}(Ae^{i\phi})$$

Fundamentalsatz der Algebra:

- Jedes Polynom vom Grad $N \geq 1$ lässt sich in \mathbb{C} schreiben als

$$f(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n = a_N \prod_{n=0}^N (z - z_n)$$

- Die komplexen Zahlen bilden einen formalen Abschluss. Man braucht keine übergeordnete Zahlenmenge, um Polynome komplett zu behandeln
- Anwendungen in Kap. 4.7 Eigenwerte, Kap. 7.1.5 Lösung von Differentialgleichungen und Kap. 8 Lineare Schwingungen

Analytische Funktionen

- Definition: Eine komplexwertige Funktion $f(z)$ heißt holomorph¹ an einem Punkt z , wenn die Ableitung $f'(z)$, definiert durch

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + O(h^2) \tag{5}$$

eindeutig ist.

$O(h^2)$: Terme der Ordnung h^2 und höher, ganz im Sinne der Taylor-Entwicklung.

¹”formvollendet”

- Da sich komplexe Zahlen $z = x + iy$ als Elemente von \mathbb{R}^2 durch (x, y) darstellen lassen, könnte man denken, dass jede differenzierbare zweikomponentige Funktion auf dem \mathbb{R}^2 eine holomorphe Funktion definiert.

Weit gefehlt !

- Betrachte die Abbildung

$$(u(x, y), v(x, y)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \text{mit verschachtelt } (.,.) = (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)).^2$$

quasi als "Ersatz" der Abbildung

$$f(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

ZEICHNUNG mit entsprechenden Achsenbeschriftungen, ev. explizites Beispiel

- Betrachte zwei-dimensionale Taylor-Entwicklung von $(u(x, y), v(x, y))$:

$$\begin{aligned} (u(x + h_1, y + h_2), v(x + h_1, y + h_2)) &= (u(x, y), v(x, y)) \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial x} h_1 + \frac{\partial u}{\partial y} h_2, \frac{\partial v}{\partial x} h_1 + \frac{\partial v}{\partial y} h_2 \right) + O(h^2) \end{aligned} \quad (6)$$

- Entscheidend: Vergleich mit Gl. (5):

Der in h_i lineare Ausdruck soll sich als Produkt $f'(z)h$ schreiben lassen.

Sei $f'(z) = (a(x, y), b(x, y))$ und $h = (h_1, h_2)$

Mit den Regeln der komplexen Multiplikation, Gl. (*), folgt

$$f'(z)h = (ah_1 - bh_2, ah_2 + bh_1) \quad (7)$$

- Vergleiche in Gl. (6) und Gl. (7) die zu a und b gehörenden Terme.

Ergibt:

$$a = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad b = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Diese Gleichungen (ohne "a =" und "b =" :-) heißen Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen.

²Völlig korrekt müsste es $(u((x, y)), v((x, y)))$ heissen.

- Interpretation:

Die Freiheit der vier Terme in der $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Formulierung in Gl. (6) reduziert sich in der $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ Formulierung in Gl. (7) auf zwei.

Gelten die Cauchy-Riemann'schen DGLs nicht, hat die Funktion keine Ableitung.

Definition: Eine analytische Funktion lässt sich in einer offenen Umgebung D von z_0 als Potenzreihe darstellen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

Man kann zeigen: Jede in D holomorphe Funktion ist auch in D analytisch.

Warum komplexe Zahlen ?

- Jede Messgröße der Physik ist reell.
- Warum dann komplexe Zahlen ?
- Häufig vereinfacht folgende Strategie die Behandlung von Problemen
 - Formuliere das reell-wertige Problem im Komplexen
 - Löse es im Komplexen
 - Nimm den Realteil als physikalische Lösung
- Die Quantenmechanik ist genuin komplexwertig, ihre Vorhersagen natürlich reellwertig.

Empfohlene weiterführende Vorlesung in der Mathematik: Funktionentheorie

Lessons learned:

- Euler-Gleichung $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$
- Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten: $z = |z|e^{i\phi}$
- Nicht jede Funktion $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert eine holomorphe Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen geben Bedingungen
- Rechnen im Komplexen oft einfacher als im Reellen

2. Wo.

3 Vektoren

Motivation: Vektoren sind eins der fundamentalen mathematischen Objekte der Physik

Für die Anschauung:

- Viele Größen der Physik sind skalare Größen, i.e. Zahlen
 - Temperatur
 - Zeit
 - Energie
- Größen, die auch eine Richtung haben, werden durch Vektoren beschrieben
 - Die Lage eines Massenpunktes in Bezug auf einen Bezugspunkt
 - Geschwindigkeiten
 - Kräfte

Vektor, zur Einfachheit in 2 Dimensionen

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

ist definiert durch

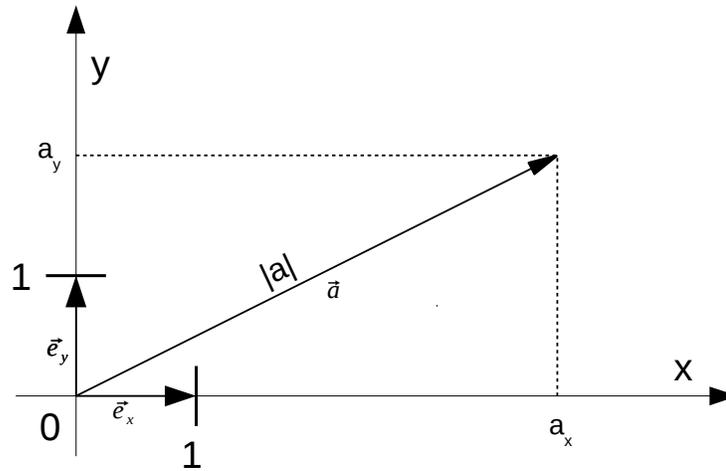
- seine Koordinaten a_1, a_2
- oder seinen Betrag $|\vec{a}|$ und seine Richtung

Ein Vektor \vec{a} kann in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden:

- Führe die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein.



- In dieser Basis ist dann

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$$

- Oder in Spaltenschreibweise

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

Länge und Richtung

- Satz des Pythagoras liefert die Länge

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2, \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

- Richtung ist gegeben durch

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

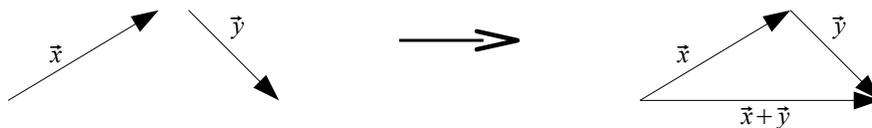
- Zusammen:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{e}_a$$

Addition zweier Vektoren und Multiplikation mit Skalar sind komponentenweise definiert

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$



Nun etwas formaler :-)

3.1 Gruppen und Körper

Definition: Eine Gruppe ist eine Menge G zusammen mit einer Abbildung

$$\circ : G \times G \rightarrow G,$$

für die gilt

- Assoziativität:

$$\forall g_1, g_2, g_3 \in G \text{ gilt : } (g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$$

- Existenz eines Einselements e :

$$\exists e, \text{ so dass } \forall g \in G \text{ gilt } g \circ e = e \circ g = g$$

- Existenz eines Inversen :

$$\forall g \in G \text{ gibt ein Element } g^{-1} \text{ so dass gilt : } g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$$

Gilt ferner:

- Kommutativität:

$$\forall g_1, g_2 \in G \text{ gilt: } g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$$

so heißt die Gruppe kommutative Gruppe oder Abel'sche Gruppe.

Bemerkung zum Higgs Boson

Beispiel:

- Die ganzen Zahlen bilden eine Gruppe bezüglich der Addition.
- Einselement: $e = 0$
- Inverses Element von z ist $-z$

Definition: Ein Körper ist eine Menge K zusammen mit zwei Abbildungen

$$+ : K \times K \rightarrow K \quad \text{und} \quad \cdot : K \times K \rightarrow K$$

- Bezüglich “+” bildet K eine kommutative Gruppe. Einselement wird als “0” bezeichnet, das zu z inverse Element mit $-z$.
- Bezüglich “ \cdot ” bildet $K \setminus \{0\}$ eine kommutative Gruppe. Das Einselement ist “1”
- Es gilt das Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

Beispiele: Rationale und reelle Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation.

3.2 Vektorräume

Definition: Ein Vektorraum V über einem Körper K ist eine Menge mit zwei Verknüpfungsregeln

- $+ : V \times V \rightarrow V$
- $\cdot : K \times V \rightarrow V$

für die mit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt:

- Assoziativität:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

- Kommutativität:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

- Existenz eines Einselements

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

- Existenz eines Inversen

$$\vec{a} + \vec{-a} = \vec{-a} + \vec{a} = \vec{0}$$

- Distributivgesetze

$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$$

- Noch ein Assoziativitätsgesetz

$$\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$$

- und

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

Bemerkung: ” \cdot ” wird in der Regel unterdrückt, auch da es später eine andere Bedeutung bekommt.

Beispiele:

- n -Tupel, die Menge V aller Vektoren mit n Komponenten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}$$

- Menge aller reellen Polynome vom Grade n
- Die Menge aller stetigen Funktionen, unendlich-dimensionaler Vektorraum
- Menge aller differenzierbaren Funktionen, dito
- Die Lösungen von linearen Differentialgleichungen, siehe Kap. 7.1.5
- Menge aller konservativen Kraftfelder
- In der Quantenmechanik: Vektorraum der Wellenfunktionen

Typischer Dreisprung:

- Starte in Anschauung
- Formalisiere
- Übertragung auf Entitäten jenseits der Anschauung, die auch unter den Formalismus fallen

Wichtige Begriffe:

- Definition: Lineare Unabhängigkeit. Ein Satz von Vektoren $\{\vec{v}_i\}_{i=1,\dots,n}$ mit $\vec{v}_i \neq \vec{0}$ heißt linear unabhängig, wenn aus

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i = 0$$

folgt: $\alpha_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$

- Definition: Dimension. Die maximale Zahl m , so dass es m linear unabhängige Vektoren gibt, heißt Dimension des Vektorraums.
- Definition: Basis. Für einen Vektorraum V der Dimension n bilden je n linear unabhängige Vektoren $\{\vec{e}_i\}$ eine Basis.

Satz: Jeder Vektor $\vec{x} \in V$ lässt sich als Linearkombination dieser Basis schreiben:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$$

Beweis:

- Die $n + 1$ Vektoren $\{\vec{e}_i\}$ und \vec{x} müssen linear abhängig sein.
- Daher existieren reelle Zahlen $\alpha_0, \{\alpha_i\}$, mindestens ein $\alpha_i \neq 0$, mit

$$\alpha_0 \vec{x} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i = 0$$

- $\alpha_0 \neq 0$, da \vec{e}_i Basis bilden, und somit linear unabhängig sind
- Teile durch α_0
- Definiere: $x_i = -\alpha_i/\alpha_0$
- $\{x_i\}$ heißen Komponenten des Vektors \vec{x} bezüglich der Basis $\{\vec{e}_i\}$

Betrachte zwei Vektoren \vec{x}, \vec{y} ausgedrückt in der Basis $\{\vec{e}_i\}$

$$\vec{x} = \sum_i x_i \vec{e}_i \quad \vec{y} = \sum_i y_i \vec{e}_i$$

so folgt für die Summe

$$\vec{x} + \vec{y} = \sum_i (x_i + y_i) \vec{e}_i$$

Merke: Ist die Basis festgelegt, lässt sich jeder Vektor als n -Tupel seiner Komponenten ausdrücken.

3.3 Skalarprodukt

Definition: Norm. Eine Norm ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+^0$$

mit den Eigenschaften

- Definitheit: $\|\vec{x}\| = 0 \implies \vec{x} = 0$
- Homogenität: $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|$
- Dreiecksungleichung: $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

Definition: Skalarprodukt. Eine Abbildung

$$g(.,.) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt Skalarprodukt oder inneres Produkt auf einem Vektorraum V , wenn gilt

- Symmetrie: $g(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{y}, \vec{x})$
- Bilinearität: $g(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha g(\vec{x}, \vec{y}) + \beta g(\vec{x}, \vec{z})$

Gilt außerdem $g(\vec{x}, \vec{x}) > 0 \forall \vec{x} \neq \vec{0}$, so heißt es positiv definit und nicht entartet.

Mit

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{g(\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y})}$$

liefert ein solches Skalarprodukt eine Metrik

- Positivität: $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$
- $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \implies \vec{x} = \vec{y}$
- Symmetrie: $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$
- Dreiecksungleichung: $d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z}) \geq d(\vec{x}, \vec{z})$

Notation:

- Statt $g(\vec{x}, \vec{y})$ schreibt man in der Physik in der Regel $\vec{x} \cdot \vec{y}$.
- Besonders in der Quantenmechanik $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$, $\langle \vec{x} |$ ein bra-Vektor, $|\vec{y} \rangle$ ein ket-Vektor.

Das kartesische Skalarprodukt hat die Form

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

- Betrachte:

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Ergibt Länge von \vec{x}

$$|\vec{x}| = x = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

Die Länge ist eine Norm. Man sagt "Das Skalarprodukt induziert eine Norm".

Übung: Abstraktere Normen

- Betrachte (ab jetzt Norm $|\vec{x}|$ oder einfach x):

$$(\vec{x} - \vec{y})^2 = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = x^2 + y^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y}$$

Die Vektoren \vec{x} , \vec{y} und $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$ bilden die Seiten eines Dreiecks.

Damit

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y}$$

- Vergleich mit Kosinussatz der Trigonometrie

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma$$

liefert:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \gamma$$

mit γ dem von den Vektoren \vec{x} und \vec{y} eingeschlossenen Winkel.

Insbesondere

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \iff \gamma = 90^\circ$$

- Zusammenfassend: Mit dem Skalarprodukt läßt sich die Länge eines Vektors und der Winkel zwischen zwei Vektoren bestimmen.
- Ein Vektorraum mit diesem Skalarprodukt heißt Euklidischer Vektorraum, der unserem Anschauungsraum entspricht.

Das Symbol

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt Kronecker- δ .

Definition: Orthogonal-/ Orthonormalbasis. Sei $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ eine Basis von V

- Gilt $\langle e_i | e_j \rangle = 0$ für $i \neq j$, so heißt die Basis Orthogonalbasis.
- Gilt sogar $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$ so heißt die Basis Orthonormalbasis.

Man kann zeigen, Übung

- Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

$$|\lambda \vec{x}| = |\lambda| |\vec{x}|$$

- Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

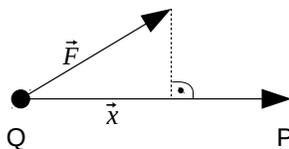
$$(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \leq |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2$$

- Dreiecksungleichung

$$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$$

Physikalische Anwendung:

- Verschiebungsarbeit
- Konstante Kraft \vec{F} wirke auf Teilchen, das von Punkt Q nach P mit Verbindungsvektor \vec{x} bewegt wird.



- Dann gilt

$$W = \vec{F} \cdot \vec{x}$$

Insbesondere

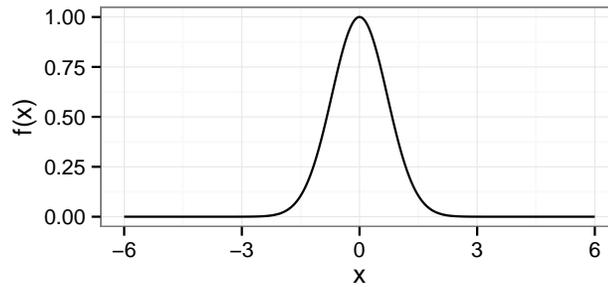
$$W = 0, \quad \text{falls } \vec{F} \text{ senkrecht auf } \vec{x}$$

Es muss nicht immer $\vec{x} \cdot \vec{y}$ sein

- Seien $f(x)$ und $h(x)$ quadrat-integrable Funktionen, d.h

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)^2 < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx h(x)^2 < \infty$$

Anschauung: $f(x)$ divergiert nirgends und fällt für $x \rightarrow \pm\infty$ schnell genug ab, so dass das Integral endlich bleibt



- Dann bildet

$$g(f(x), h(x)) := \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)h(x)$$

ein Skalarprodukt

3.4 Kreuzprodukt

Definition: Betrachte Vektorraum \mathbb{R}^3 . Definiere Abbildung

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Bezeichnungen: Kreuzprodukt, Vektorprodukt, äußeres Produkt
Eigenschaften:

- Antisymmetrie: $\vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x})$
- Bilinearität: $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}) + (\vec{x} \times \vec{z})$
- $\vec{x} \times (\alpha \vec{y}) = \alpha(\vec{x} \times \vec{y})$

Aus Antisymmetrie folgt sofort

$$\vec{x} \times \vec{x} = 0$$

Ferner gilt (Beweis als Übung):

•

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{x} = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{y} = 0$$

•

$$|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}| - \vec{x} \cdot \vec{y}$$

Betrachte Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Bedeutung:

- Vektor $\vec{x} \times \vec{y}$ hat nur 3-Komponente, steht also senkrecht auf \vec{x} und \vec{y}
- Sei α der Winkel den \vec{x} mit der x -Achse einschließt, β der von \vec{y} , so gilt

$$x_1 = |\vec{x}| \cos \alpha, \quad x_2 = |\vec{x}| \sin \alpha, \quad y_1 = |\vec{y}| \cos \beta, \quad y_2 = |\vec{y}| \sin \beta$$

- Damit

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = |\vec{x}||\vec{y}|(\cos \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha) = |\vec{x}||\vec{y}| \sin(\beta - \alpha)$$

- Winkel $\gamma = \beta - \alpha$ ist der von \vec{x} und \vec{y} eingeschlossene
- Somit:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\vec{x}||\vec{y}| \sin \gamma \end{pmatrix}$$

- $|\vec{x}||\vec{y}| \sin \gamma$ ist gleich der Fläche des Parallelogramms, dass von \vec{x} und \vec{y} aufgespannt wird.
- Es folgt:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0} \iff \gamma = 0^\circ \text{ oder } \gamma = 180^\circ \iff \vec{x} = \alpha \vec{y}$$

- Für die Richtung von $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ gilt die "Rechte-Hand-Regel"

Der ϵ -Tensor oder Levi-Civita-Symbol

- $i, j, k = 1, 2, 3$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{wenn zwei der Indizes gleich sind} \\ 1 & \text{wenn die drei Indizes zyklisch angeordnet sind} \\ -1 & \text{wenn die drei Indizes anti-zyklisch angeordnet sind} \end{cases}$$

also

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} &= 1 \\ \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = \epsilon_{213} &= -1 \\ \text{sonst: } \epsilon_{ijk} &= 0 \end{aligned}$$

- Damit folgt für Kreuzprodukt

$$(\vec{x} \times \vec{y})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_j y_k, \quad i = 1, 2, 3$$

3. Woche

Für ein rechtshändiges Orthonormalsystem gilt:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= \vec{e}_1 \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= \vec{e}_2 \end{aligned}$$

Physikalische Anwendung

- Drehimpulserhaltung kräftefreier Bewegung
- Zur Zeit $t = 0$ befinde sich Teilchen mit Masse m am Orte $\vec{x}(0)$ und habe den Impuls $\vec{p}(0) = m\vec{v}(0)$.

- Drehimpuls:

$$\vec{L} := \vec{x} \times \vec{p}$$

- Es wirken keine Kräfte: $\vec{p}(t) = \vec{p}_0$

- Bewegung des Teilchens

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \frac{\vec{p}(t)}{m} t$$

Damit

$$\vec{L}(t) = \vec{x}(t) \times \vec{p}(t) = \left(\vec{x}(0) + \frac{\vec{p}(0)}{m} t \right) \times \vec{p}(0) = \vec{x}(0) \times \vec{p}(0) = \vec{L}(0)$$

- Drehimpulserhaltung

3.5 Spatprodukt

Das Spatprodukt ist eine Kombination aus Skalar- und Vektorprodukt.

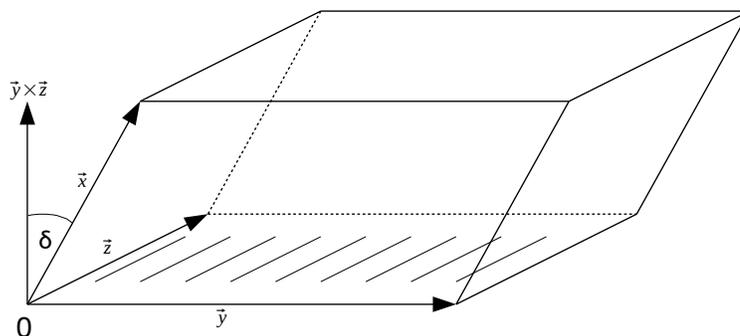
- Es misst das Volumen des von drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds:

$$\text{Vol}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = |\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})|$$

- Begründung

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = |\vec{x}| |\vec{y} \times \vec{z}| \cos \delta$$

- $|\vec{y} \times \vec{z}|$ ist von \vec{y} und \vec{z} aufgespannte Fläche
- δ ist Winkel zwischen einem Vektor senkrecht auf der von $\vec{y} \times \vec{z}$ aufgespannten Ebene und \vec{x} .
- $|\vec{x}| \cos \delta$ ist gleich der Komponente von \vec{x} senkrecht zu der Ebene, also seine "Höhe".
- Höhe mal Fläche ergibt Volumen



- Aus der expliziten Darstellung

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_2 y_1 z_3 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 \quad (9)$$

folgt die zyklische Symmetrie des Spatproduktes:

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = \vec{z} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{y} \cdot (\vec{z} \times \vec{x})$$

- Formulierung mit ϵ -Tensor

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = \sum_{ijk}^3 \epsilon_{ijk} x_i y_j z_k$$

Lessons learned:

- Viele fundamentale Größen der Physik bilden einen Vektorraum.
- Was ist ein Vektor? Etwas, das in einem Vektorraum lebt.
- Skalarprodukt misst Winkel und Längen.
- Im \mathbb{R}^3 : Kreuzprodukt misst Flächen.
- Im \mathbb{R}^3 : Spatprodukt misst Volumina.

4 Lineare Abbildungen

Motivation: Zahlreiche Zusammenhänge der Physik lassen sich als lineare Abbildungen darstellen oder (Taylor-) nähern.

4.1 Abbildungen

Definition: Eine Abbildung f von einer Menge V in eine Menge W ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element $v \in V$ genau ein Element $w \in W$ zuordnet:

$$f : V \rightarrow W \quad v \mapsto w = f(v)$$

Bezeichnungen:

- w bezeichnet man als das Bild von v
- Die Menge aller $v \in V$ mit $f(v) = w$ heißt Urbildmenge von w
- Die Menge aller w , für die es (mindestens) ein $v \in V$ mit $f(v) = w$ gibt, heißt Bildmenge der Abbildung f
- Wird $v \in V$ mehr als ein Element $w \in W$ zugeordnet, spricht man von einer Relation, vll. ZEICHNUNG

Definitionen:

- Abbildung f heißt injektiv, wenn aus $f(v) = f(v')$ folgt $v = v'$
 - Urbildmenge zu jedem $w \in W$ enthält maximal ein Element.
 - Beispiel $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: $f(v) = v$
 - Gegenbeispiel: $f(v) = v^2$
 - Injektive Abbildungen sind umkehrbar. D.h es existiert eine Inverse $f^{-1}(w)$
- Abbildung f heißt surjektiv, wenn es zu jedem $w \in W$ (mindestens) ein $v \in V$ gibt, so dass $f(v) = w$.
 - Bildmenge von f ist also gleich der gesamten Menge W .
 - Beispiel $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: $f(v) = v$
 - Gegenbeispiel: $f(v) = v^2, f(v) = e^v$
- Abbildung f heißt bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.
- ZEICHNUNGEN

4.2 Lineare Abbildungen

Vorbemerkung:

- Viele Abbildungen sind von Hause aus linear
- Nicht-lineare Abbildungen mit $f(0) = 0$ sind in erster Ordnung Taylor-Entwicklung um 0 linear

Definitionen:

- Seien V und W Vektorräume. Eine Abbildung $A : V \rightarrow W$ heißt linear, wenn gilt:

$$A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha A(\vec{x}) + \beta A(\vec{y}), \quad \vec{x}, \vec{y} \in V, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- Der Kern einer linearen Abbildung $A : V \rightarrow W$ ist der Untervektorraum von V , für den gilt

$$\text{Kern}(A) = \{\vec{x} \in V \mid A(\vec{x}) = 0\}$$

- Das Bild einer linearen Abbildung $A : V \rightarrow W$ ist der Untervektorraum von W , für den gilt

$$\text{Bild}(A) = \{A(\vec{x}) \mid \vec{x} \in V\}$$

Beweis, dass $\text{Kern}(A)$ und $\text{Bild}(A)$ (Unter-)Vektorräume sind, als Übung Dimension des Bildraumes heißt Rang.

- Ist $A : V \rightarrow W$, so gilt $\dim(\text{Bild}(A)) + \dim(\text{Kern}(A)) = \dim(V)$

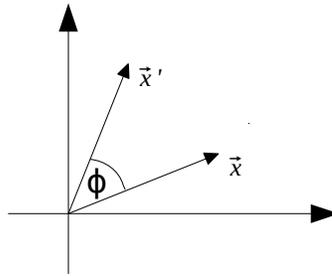
4.3 Matrizen

Motivation:

- Betrachte Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Durch eine Drehung um einen festen Winkel ϕ ergibt sich $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$



$$\begin{aligned}\vec{x}'_1 &= \cos \phi x_1 - \sin \phi x_2 \\ \vec{x}'_2 &= \sin \phi x_1 + \cos \phi x_2\end{aligned}$$

Um das kompakt zu schreiben, definieren wir die Matrixschreibweise

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos \phi x_1 - \sin \phi x_2 \\ \sin \phi x_1 + \cos \phi x_2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = D \vec{x}$$

mit Matrix D

$$D = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

• Rechenvorschrift:

- "Lege" Vektor auf die einzelnen Zeilen der Matrix
- Multipliziere aufeinanderfallende Vektor- und Matrixelemente
- Addiere zeilenweise auf
- Ergibt neuen Vektor
- "Bauklotz-Prinzip"

$$\begin{pmatrix} \boxed{x'_1} \\ \boxed{x'_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{D_{11}} & \boxed{D_{12}} \\ \boxed{D_{21}} & \boxed{D_{22}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{D_{11}} & \boxed{D_{12}} \\ \boxed{D_{21}} & \boxed{D_{22}} \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{x_1} \\ \boxed{x_2} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

- Beschreibt D eine lineare Abbildung ?
Man sieht sofort, dass die Bedingungen

$$\begin{aligned} D(\vec{x} + \vec{y}) &= D\vec{x} + D\vec{y} \\ D(\lambda\vec{x}) &= \lambda D\vec{x} \end{aligned}$$

erfüllt sind.

- Das gilt auch allgemein:
Sei

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

dann ist

$$x \mapsto x' = Ax, \quad \vec{x}' \in \mathbb{R}^2$$

die allgemeine Form einer linearen Abbildung im \mathbb{R}^2 .

- Dies verallgemeinert direkt auf $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x}' \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Definition: Eine $m \times n$ Matrix A ist gegeben durch:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

in Kurzform

$$A = \{a_{ij}\}$$

Nomenklatur:

- Mitunter werden Matrizen durch A gekennzeichnet.
- Hier: Großbuchstaben, aus Kontext immer klar, was gemeint.

Bezeichnungen

- Die Zahlen a_{ij} heißen Elemente der Matrix A .

- Die Elemente

$$a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in} \quad i = 1, \dots, \ m \text{ fest}$$

bilden die i -te Zeile A_i der Matrix A .

- Die Elemente

$$\begin{array}{c} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{array} \quad j = 1, \dots, n \text{ fest}$$

bilden die j -te Spalte A^j der Matrix A .

- $n \times n$ Matrizen heißen quadratische Matrizen.

Ihre Elemente a_{ii} heißen Diagonalelemente.

- Eine quadratische Matrix mit $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$ heißt Diagonalmatrix.

- Haben alle Elemente einer Diagonalmatrix den Wert 1, so heißt sie Einheitsmatrix $\mathbb{1}$.

Elementare Rechenregeln für Matrizen

- Addition

Die Addition zweier $m \times n$ Matrizen ist elementweise definiert und ergibt wieder eine $m \times n$ Matrix

$$A + B = C = \{c_{ij}\} = \{a_{ij} + b_{ij}\}$$

- Multiplikation mit einem Skalar

$$B = \lambda A = \{\lambda a_{ij}\}$$

- Man zeigt leicht:

Die Menge aller reellen $m \times n$ Matrizen bilden einen Vektorraum.

Multiplikation von Matrizen
Betrachte lineare Abbildung

$$\vec{y} = A\vec{x}$$

Wendet man auf \vec{y} eine weitere lineare Abbildung (Matrix B) an, folgt

$$\vec{z} = B\vec{y} = BA\vec{x} = C\vec{x} \quad \text{mit} \quad C = BA$$

Wie sieht nun Matrix C aus ?

- Am Beispiel von 2×2 Matrizen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \\ b_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{22}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})x_2 \\ (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x_1 + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})x_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} C\vec{x} \end{aligned}$$

und somit

$$C = \begin{pmatrix} (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}) & (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}) \\ (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21}) & (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = BA$$

- Das Hintereinanderausführen von linearen Abbildungen ergibt wieder eine lineare Abbildung
- Oder: Die Multiplikation zweier Matrizen ergibt wieder eine Matrix.
- ”Zeile mal Spalte”
Zeile der ersten Matrix mal Spalte der zweiten

- c_{11} entsteht aus der ersten Zeile von B und der ersten Spalte von A :
 $c_{11} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}$
- c_{12} entsteht aus der ersten Zeile von B und der zweitem Spalte von A :
 $c_{12} = b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{c_{11}} & \boxed{c_{12}} \\ \boxed{c_{21}} & \boxed{c_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{b_{11}} & \boxed{b_{12}} \\ \boxed{b_{21}} & \boxed{b_{22}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{b_{11}} \\ \boxed{b_{21}} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{b_{12}} \\ \boxed{b_{22}} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{b_{11}} \\ \boxed{b_{21}} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{b_{12}} \\ \boxed{b_{22}} \\ \hline \end{array} \end{pmatrix}$$

Der allgemeine Fall A : $k \times m$ Matrix, B $m \times n$ Matrix, C $k \times n$ Matrix:

$$C = AB = \{c_{il}\} = \sum_{j=1}^m a_{ij}b_{jl}, \quad i = 1, \dots, k, \quad l = 1, \dots, n$$

Beachte: Dimensionen müssen passen.

- Formaler:

Sei A_i die i -te Zeile von A und B^j die j -te Spalte von B , dann gilt

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 & \dots & A_1 \cdot B^n \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 & \dots & A_2 \cdot B^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_k \cdot B^1 & A_m \cdot B^2 & \dots & A_m \cdot B^n \end{pmatrix}$$

- Mit der Multiplikation von Matrizen wird aus dem Vektorraum der Matrizen eine Algebra.

4. Woche

Rang

- Definition: Der Zeilenrang einer Matrix ist die Dimension des durch die Zeilen gebildeten Vektorraums
Spaltenrang entsprechend
- Satz: Sei A ($m \times n$) Matrix, dann gilt $\text{Spaltenrang}(A) = \text{Zeilenrang}(A)$
- Damit macht $\text{Rang}(A)$ Sinn
Es gilt: $\text{Rang}(A) = \text{Dimension Bild}(A)$, Beweis als Übung

Vektoren als Matrizen

- (Spalten-) Vektoren sind in diesem Sinne $n \times 1$ Matrizen
- (Zeilen-) Vektoren (des Dualraums)³ sind $1 \times n$ Matrizen
- Damit Skalarprodukt im Sinne der Matrizenmultiplikation

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für Matrizen:

- Distributivgesetze: $(A + B)C = AC + BC$, resp. $A(B + C) = AB + AC$
- Assoziativgesetz: $(AB)C = A(BC)$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- Im Allgemeinen gilt aber : $AB \neq BA$, A, B ($n \times n$) Matrizen
Lineare Abbildungen/Matrizen kommutieren im Allgemeinen nicht !
Dies wird ein Kern der Quantenmechanik ! Stichwort: Unschärferelation

³Siehe nächstes Kapitel

Weitere lineare Abbildungen:

- Integrale sind lineare Abbildungen für Funktionen

$$\int_a^b dx(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \int_a^b dx f(x) + \beta \int_a^b dx g(x)$$

- Ableitungen ebenso

$$\frac{d}{dx}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \frac{d}{dx} f(x) + \beta \frac{d}{dx} g(x)$$

4.4 Der duale Vektorraum

Für Genießer

- Betrachte Menge der linearen Abbildungen $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$
Abbildungen vom Vektorraum nach \mathbb{R} heißen Funktionale.

- Man kann zeigen:
 - Die Menge der Abbildungen ω bildet einen Vektorraum V^* .
 - Die Dimension ist die gleiche wie die des Vektorraumes V .⁴

Ein Element $\vec{\omega} \in V^*$ ist eindeutig durch seine Anwendung auf die Basisvektoren von V gegeben:

$$\vec{\omega}(\vec{x}) = \vec{\omega} \left(\sum_{i=1}^n x^i \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n x^i \vec{\omega}(\vec{e}_i)$$

Die n Zahlen $\omega_i = \vec{\omega}(\vec{e}_i)$ legen das Element $\vec{\omega}$ somit eindeutig fest.

Duale Basis:

- Sei Basis $\{\vec{e}_i\}$ von V gegeben

⁴Dies gilt nur für endlich dimensionale Vektorräume. Für unendlich-dimensionale Vektorräume kann der Dualraum "größer" sein. Zum genießen: search for: Gelfand'sches Raumtripel

- Die durch

$$\bar{\epsilon}^i(\vec{e}_j) = \delta_j^i := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Basis im Dualraum heißt duale Basis.

- mit Kronecker- δ δ_j^i .

Indexschreibweise und Summenkonvention

Übliche Notation:

- Indizes der Basisvektoren von V unten: \vec{e}_i
- Indizes der Komponenten oben: $\vec{x} = \sum_i x^i \vec{e}_i$
- Im Dualraum umgedreht $\vec{\omega} = \sum_i \omega_i \bar{\epsilon}^i$

Anwendung von Abbildung $\vec{\omega}$ auf Vektor \vec{x}

$$\vec{\omega}(\vec{x}) = \left(\sum_i \omega_i \bar{\epsilon}^i \right) \left(\sum_j x^j \vec{e}_j \right) = \sum_{ij} \omega_i x^j \bar{\epsilon}^i(\vec{e}_j) = \sum_{ij} \omega_i x^j \delta_j^i = \sum_i \omega_i x^i \quad (10)$$

- Zu summierender Index tritt immer zweimal auf: Einmal oben, einmal unten
- Einstein'sche Summenkonvention: Tritt ein Index einmal oben und einmal unten auf, so ist über ihn zu summieren

Damit wird Gleichung (10) zu:

$$\vec{\omega}(\vec{x}) = (\omega_i \bar{\epsilon}^i)(x^j \vec{e}_j) = \omega_i x^j \bar{\epsilon}^i(\vec{e}_j) = \omega_i x^j \delta_j^i = \omega_i x^i$$

- Tritt ein Index auf einer Seite der Gleichung nur einmal auf, wird nicht über ihn summiert, und er muss auch auf der anderen Seite der Gleichung an derselben Stelle auftreten.
- Beispiel: Betrachte lineare Abbildung, die jedem Vektor die i -te Komponente zuordnet

$$\bar{\epsilon}^i(\vec{x}) = \bar{\epsilon}^i(x^j \vec{e}_j) = x^j \bar{\epsilon}^i(\vec{e}_j) = x^j \delta_j^i = x^i$$

Notation:

- Die Elemente von V werden in Komponentenschreibweise als Spaltenvektor geschrieben

$$\vec{x} \simeq \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

die Elemente von V^* als Zeilenvektor

$$\vec{\omega} \simeq (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$$

- Die Anwendung von $\vec{\omega}$ auf \vec{x} folgt dann den Regeln der Matrixmultiplikation

$$\vec{\omega}(\vec{x}) = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \omega_1 x^1 + \omega_2 x^2 + \dots + \omega_n x^n$$

Skalarprodukt $g(.,.)$ revisited

- Mit der Summenkonvention gilt:

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = g(x^i \vec{e}_i, y^j \vec{e}_j) = x^i y^j g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = x^i y^j g_{ij}$$

mit

$$g_{ij} := g(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$$

- Das kartesische Skalarprodukt war definiert als Abbildung $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
Mit orthonormalen Basisvektoren $\{\vec{e}_i\}$ gilt:

$$g_{ij} := g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$$

Damit:

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} = \delta_{ij} x^i y^j = x_j y^j \tag{11}$$

- Es läßt sich aber auch nutzen, um eine Abbildung $V \rightarrow V^*$ zu definieren:
 \vec{x} aus V wird abgebildet auf $\vec{\omega}(\vec{x}) \in V^*$, so dass für alle $\vec{y} \in V$ gilt:

$$\vec{\omega}(\vec{x})(\vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y})$$

$\vec{\omega}(\vec{x})$ ist überladene Notation. Im Sinne von “ $y = f(x)$ ” wird die Abbildung mit ihrem Ergebnis identifiziert, das dann die Abbildung $V \rightarrow V^*$ ist :-)

- Für die Komponenten von $\vec{\omega}(\vec{x})$ in der dualen Basis von V^* folgt:

$$\omega(\vec{x})_i = \sum_j g_{ij} x^j$$

Es lassen sich also Indizes ”von oben nach unten ziehen” oder Spalten in Zeilenvektoren verwandeln

Das definiert Abbildung $g : V \rightarrow V^*$

- Da das Skalarprodukt nicht entartet ist, ist die Abbildung $g : V \rightarrow V^*$ bijektiv und eindeutig umkehrbar

Es existiert eine Abbildung $g^{-1} : V^* \rightarrow V$ mit $g^{-1} \circ g = 1$

$$\sum_k (g^{-1})^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$$

Man definiert vereinfachend: $(g^{-1})^{ij} =: g^{ij}$

- So lassen sich Indizes ”von unten nach oben ziehen”

$$g^{-1}(\omega)^i = \sum_j g^{ij} \omega_j$$

Zeilenvektoren des Dualraumes zu Spaltenvektoren des Vektorraumes verwandeln

Wozu das Ganze ?

- An Gl. (11) sehen wir, dass es für das kartesische Skalarprodukt keine wirklich Rolle spielt, lax formuliert $x_i = x^i$.

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und "hinlegen"}$$

Länge eines Vektors:

$$|\vec{x}| = g(\vec{x}, \vec{x}) = g_{ij}x^i x^j = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

- Das ändert sich in der Relativitätstheorie
Spezielle Relativitätstheorie:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ ct \end{pmatrix}$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und "hinlegen"}$$

Länge eines Vektors:

$$|\vec{x}| = g(\vec{x}, \vec{x}) = g_{ij}x^i x^j = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (ct)^2$$

In Übung

- Entitäten mit "Index unten" transformieren sich kovariant, i.e. wie Basisvektoren des Vektorraumes
- Entitäten mit "Index oben" transformieren sich kontravariant, i.e. wie Komponenten eines Vektors

4.5 Determinanten

- Permutation: Vertauschen von Zahlen eines n -Tupels

Beispiel : $(1, 2, 3)$, $3! = 6$ mögliche Permutationen

0 paarweise Vertauschungen:	$(1, 2, 3)$	grade Permutation
1 paarweise Vertauschung:	$(2, 1, 3)(1, 3, 2)(3, 2, 1)$	ungrade Permutation
2 paarweise Vertauschungen:	$(2, 3, 1)(3, 1, 2)$	grade Permutation

Zeichnung mit 1, 2, 3 im Kreis

Erinnere ϵ -Tensor

- Definition: Die Determinante einer $n \times n$ Matrix A ist definiert als:

$$\det A := \sum_p (-1)^{|p|} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} \dots a_{np_n} \quad (12)$$

wobei über alle Permutationen p mit $p(1, 2, 3, \dots, n) = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ zu summieren ist. $|p| :=$ Anzahl der paarweisen Vertauschungen.

- Grade Permutation: Grade Anzahl von Vertauschungen, $(-1)^{|p|} = 1$
- Ungrade Permutation: Ungrade Anzahl von Vertauschungen $(-1)^{|p|} = -1$

- Mit n -dimensionalem ϵ Tensor

$$\epsilon_{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n} = \begin{cases} 0 & \text{wenn zwei der Indizes gleich sind} \\ 1 & \text{grade Permutation} \\ -1 & \text{ungrade Permutation} \end{cases}$$

auch

$$\det A = \sum_{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n} \epsilon_{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} \dots a_{np_n}$$

Interpretation:

- Die Determinante gibt das Volumen an, das durch die Spalten- oder Zeilenvektoren der Matrix A aufgespannt wird.

- Sind die Spalten und damit Zeilen der Matrix linear abhängig, Spaltenrang = Zeilenrang, verschwindet die Determinante.
Gemessen im n -dimensionalen ist $n - d$, $d \geq 1$ dimensionales Volumen gleich Null.
- Die Determinante verschwindet genau dann nicht, wenn der Bildraum der Matrix wieder der gesamte Vektorraum, die Abbildung also bijektiv ist.
- Dann gilt: $\text{Rang}(A) = n$. Man sagt: "Die Matrix hat vollen Rang."
- Andersrum: $\det A = 0$ bedeutet $\text{Rang}(A) < n$
- $\det A \neq 0$ genau dann, wenn $\text{Rang}(A) = n$. $\det A \neq 0 \iff \text{Rang}(A) = n$

Beispiele:

- Für 2×2 Matrizen:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{12} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Erinnere Gl. (8), das spezielle Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

mit

$$x_1y_2 - x_2y_1 = |\vec{x}| |\vec{y}| \sin \gamma$$

$\det(A)$ misst Fläche, die von Zeilen-, respektive Spaltenvektoren aufgespannt wird.

Sind die Spaltenvektoren von A linear abhängig, $\text{Rang}(A) = 1$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

gilt: $\det A = 0$:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \beta a_{12}a_{22} - \beta a_{22}a_{12} = 0$$

Analog Zeilenvektoren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \beta a_{21}a_{22} - \beta a_{21}a_{22} = 0$$

- Für 3×3 Matrizen:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

Identisch zu bedeutungsgleichem Spatprodukt, Kap. 3.5, Gl. (9):

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})$$

$\det A$ misst Volumen, das von Zeilen-, respektive Spaltenvektoren aufgespannt wird.

- Die Determinante einer Diagonalmatrix D ist das Produkt ihrer Einträge

$$\det D = \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Nur die identische Permutation trägt in Summe Gl. (12) bei

Man kann zeigen:

- Die Determinante des Produktes zwei Matrizen A und B ist gleich dem Produkt der Determinanten der einzelnen Matrizen:

$$\det (AB) = \det A \det B$$

- Sei A invertierbar, d.h. $\exists A^{-1}$ mit $AA^{-1} = \mathbb{1}$, so gilt

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Beweis:

$$1 = \det \mathbb{1} = \det (AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}$$

Determinanten sind ubiquitär, Anwendungen:

- Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme, next Chapter
- Bestimmung von Eigenwerten, Kap. 4.7
- Invertierung von (2×2) Matrizen, Kap. 4.8.1
- Orthogonale Matrizen, Kap. 4.8.4
- Variablensubstitution in Integralen in mehreren Variablen, Kap. 6.2
- Lösung von linearen Differentialgleichungen, Kap. 8

5. Woche

4.6 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Matrizen und Determinanten haben auch jenseits von linearen Abbildungen Bedeutung

- Definition: Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten x_1, x_2, \dots, x_n hat die Form:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

mit $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$.

- in Matrixschreibweise

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \vec{b}$$

- Aufgabe: Gegeben A und \vec{b} , finde \vec{x}
- Das lineare Gleichungssystem heißt homogen falls alle $b_i = 0$, sonst inhomogen.

Lösungsverhalten

- Im homogenen Fall $A\vec{x} = 0$ gilt mindestens stets die triviale Lösung $\vec{x} = 0$
- Sei

$$(A|b) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Erinnere: Rang und Kern einer Matrix

- Satz: $A\vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann lösbar, wenn gilt $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b)$.
Intuition dahinter
Beweis als Übung
- Gilt $m > n$ und sind die Zeilen von A linear unabhängig, so gibt es im homogenen Fall nur die triviale, im inhomogenen keine Lösung.
"Mehr Gleichungen als Unbekannte", System heißt überbestimmt.
- Gilt $m < n$, ist die Lösung nicht eindeutig.
"Weniger Gleichungen als Unbekannte", System heißt unterbestimmt.
Lösungsraum hat die Dimension $\text{Kern}(A)$.

Fall $m = n$, 4 mögliche Fälle

- $\det A \neq 0, \text{Rang}(A) = n$
 - Homogen
Lösung eindeutig: $\vec{x} = 0$
 - Inhomogen
Lösung eindeutig: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$
- $\det A = 0, \text{Rang}(A) = s < n$
 - Homogen
Mehrdeutig lösbar

$$\text{Lös}(A, b) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{n-s} v_{n-s}\}$$

mit $(v_1, v_2, \dots, v_{n-s})$ Basis von $\text{Kern}(A)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

- Inhomogen
Nur lösbar, falls $\text{Rang}(A|b) = s < n$. Dann mehrdeutig

$$\text{Lös}(A, b) = \{\hat{x} + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{n-s} v_{n-s}\}$$

mit \hat{x} einer festen Lösung des Systems.

4.7 Eigenwerte und Eigenvektoren

- Definition: Gegeben eine lineare Abbildung $A : V \rightarrow V$. Existiert eine Zahl λ und ein Vektor \vec{x} , so dass gilt

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

so heißt λ Eigenwert und \vec{x} Eigenvektor der Matrix A

- Anschauung: Anwendung von A auf \vec{x} ergibt bis auf einen Faktor wieder \vec{x} .
- Äquivalente Formulierung:

$$(A - \lambda\mathbb{1})\vec{x} = 0$$

Interpretation:

- Die Matrix $(A - \lambda \mathbb{1})$ bildet den Vektorraum, der durch \vec{x} gegeben wird, auf die Null ab.
- Ergo: $(A - \lambda \mathbb{1})$ hat nicht vollen Rang.

Mit anderen Worten

$$\det (A - \lambda \mathbb{1}) = 0 \quad \underline{\text{Charakteristische Gleichung}}$$

- Der Ausdruck

$$P_A(\lambda) = \det (A - \lambda \mathbb{1})$$

heißt Charakteristisches Polynom

- Fundamentalsatz der Algebra: Für komplexe Zahlen λ_i hat $P_A(\lambda)$ immer n Lösungen und läßt sich so schreiben

$$\det (A - \lambda \mathbb{1}) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$$

$\{\lambda_i\}$ sind die Eigenwerte der Matrix A .

- Sind einige λ_i gleich, so nennt man diese Eigenwerte entartet.

Bestimmung von Eigenwerten & Eigenvektoren

1. Eigenwerte bestimmen

Bestimme Nullstellen des Charakteristisches Polynoms.

2. Eigenvektoren bestimmen

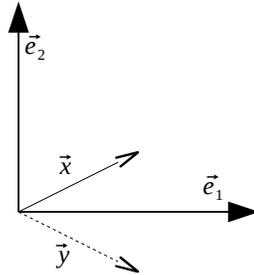
Für jeden Eigenwert λ_i , löse das lineare Gleichungssystem

$$(A - \lambda_i \mathbb{1}) \vec{v}_i = 0$$

Liefert zu λ_i gehörenden Eigenvektor \vec{v}_i

Beispiel

- Betrachte Spiegelung an \vec{e}_1 Achse, erinnere Aufgabenblatt 5.



$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{y}$$

- Suche Lösungen zu $P_A(\lambda) \stackrel{!}{=} 0$

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) \stackrel{!}{=} 0 = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = -(1 - \lambda)(1 + \lambda)$$

Ergo:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$$

- Bestimmung der Eigenvektoren

– $\lambda_1 = 1$

$$A\vec{x} = \lambda_1 \vec{x} = \vec{x}$$

$$(A - \mathbb{1})\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Es folgt:

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = 0$$

Normierter Eigenvektor:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$- \lambda_2 = -1$$

$$A\vec{x} = \lambda_2\vec{x} = -\vec{x}$$

$$(A + \mathbb{1}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \beta$$

Normierter Eigenvektor

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Anschaulich

$$- \lambda_1 = 1, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

v_1 geht bei Spiegelung an \vec{e}_1 Achse in sich selber über

$$- \lambda_2 = -1, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

v_2 geht bei Spiegelung an \vec{e}_1 Achse über in $-v_2$

Man kann zeigen: Sei A eine $n \times n$ Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, so gilt

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

Übung

∃ Reelle Matrizen mit komplexen Eigenwerten

- Betrachte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenwerte ergeben sich zu

$$\lambda_1 = 1 + i\sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 1 - i\sqrt{2}$$

Rechnung als Übung

- Merke: Reelle Matrizen können komplexe Eigenwerte haben, siehe Kap. 7.1.5

Vorfremde: Die wohl wichtigste Gleichung der Physik - die Schrödinger-Gleichung in ihrer zeitunabhängigen Form - ist eine Eigenwert-Gleichung:

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

4.8 Spezielle Matrizen

4.8.1 Die inverse Matrix

- Definition: Eine $n \times n$ Matrix A heißt invertierbar oder regulär, wenn es eine $n \times n$ Matrix A^{-1} gibt, für die gilt

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}$$

- Es gilt

$$\begin{aligned} (A^{-1})^{-1} &= A \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \end{aligned}$$

- Für 2×2 Matrizen läßt sich die Inverse explizit angeben, Übung:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

- Satz: $n \times n$ Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$, $\text{Rang}(A) = n$.

4.8.2 Die transponierte Matrix

Jeder $m \times n$ Matrix A ist ihre transponierte Matrix A^T zugeordnet, die aus A durch Vertauschen von Zeilen und Spalten entsteht.

$$A = \{a_{ij}\}, \quad A^T = \{a_{ji}\}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} (A + B)^T &= A^T + B^T \\ (\alpha A)^T &= \alpha A^T \\ (A^T)^T &= A \\ (AB)^T &= B^T A^T \end{aligned}$$

Beweis der letzten Eigenschaft

$$AB = \sum_j a_{ij} b_{jk}$$
$$(AB)^T = \sum_j a_{kj} b_{ji} = \sum_j b_{ji} a_{kj} = B^T A^T$$

Skalarprodukt revisited:

- Sei $g(\vec{x}, \vec{y})$ ein allgemeines Skalarprodukt, A eine lineare Abbildung. Dann ist die zu A adjungierte Abbildung \hat{A} gegeben durch

$$g(\hat{A}(\vec{x}), \vec{y}) = g(\vec{x}, A(\vec{y})), \quad \forall \vec{x}, \vec{y}$$

- Betrachte kartesischen Skalarprodukt, erinnere Kap. 4.4: "hinlegen".
In Matrixsprache: Transponierte eines Vektors \vec{x} ergibt einen Vektor im Dualraum.

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y}$$

Beachte: Erstes Produkt ist Skalarprodukt, zweites ist Matrixprodukt

Es folgt

$$\vec{x} \cdot (A\vec{y}) = \vec{x}^T A\vec{y} = \vec{x}^T (A^T)^T \vec{y} = (\vec{x}^T (A^T)^T) \vec{y} = (A^T \vec{x})^T \vec{y} = (A^T \vec{x}) \cdot \vec{y}$$

Ergo: Die Transponierte ist die Adjungierte

4.8.3 Symmetrische Matrizen

- Eine $n \times n$ Matrix heißt symmetrisch, wenn gilt

$$\{a_{ij}\} = \{a_{ji}\}, \quad A = A^T$$

- Für symmetrische Matrizen gilt

$$\langle \vec{x} | A\vec{y} \rangle = \langle A\vec{x} | \vec{y} \rangle$$

Symmetrische Matrizen sind selbstadjungiert

- Wichtige Eigenschaften symmetrischer Matrizen
 - Eigenwerte sind reell
 - Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal

Beweis: Übung

4.8.4 Orthogonale Matrizen

Sei A invertierbare Matrix.

- A heißt orthogonal falls gilt:

$$A^T A = A A^T = \mathbb{1} \quad \text{oder} \quad A^T = A^{-1}$$

- Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

- Es gilt

$$A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

Eigenschaften:

- Zeilen und Spalten von A bilden jeweils ein Orthonormalsystem.

Beweis für Spalten:

- Seien A_i die Zeilen, A^j die Spalten
- Nach Voraussetzung

$$A^T A = \mathbb{1}, \quad (A^T A)_{ij} = \delta_{ij}$$

Damit

$$\delta_{ij} = (A^T A)_{ij} = A_i^T \cdot A^j = A^i \cdot A^j$$

- Beweis für Zeilen analog mittels $A A^T = \mathbb{1}$

- A angewandt auf \vec{x} und \vec{y} erhält das Skalarprodukt

$$\langle A\vec{x}|A\vec{y} \rangle = \langle A^T A\vec{x}|\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}|\vec{y} \rangle$$

Es gilt auch die Umkehrung:

Erhält eine quadratische Matrix das Skalarprodukt, ist sie orthogonal.

- Anschauung: Erhalt des Skalarproduktes ist äquivalent zur Erhaltung von Längen, Winkeln und damit auch Volumina.
- Mathematisch

$$\det A = \pm 1$$

Beweis:

$$1 = \det(A^T A) = \det A^T \det A = \det A \det A = (\det A)^2$$

- Interpretation: Orthogonale Matrizen beschreiben Rotationen, $\det A = 1$, und Spiegelungen, $\det A = -1$

In zwei Dimensionen für $\det A = 1$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Man sieht sofort:

$$AA^T = \mathbb{1}$$

Exponentialfunktion und Drehungen in 2 D

- Betrachte komplexe Zahl $z = a + ib$
- Dreht man einen Punkt (a, b) in der komplexen Zahlenebene um einen Winkel ϕ , so folgt:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \phi - b \sin \phi \\ a \sin \phi + b \cos \phi \end{pmatrix}$$

Leicht zu zeigen (Übung): Man erhält die gedrehte Zahl auch durch Multiplikation von z mit

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

- Zur Verdeutlichung des Zusammenhanges, zerlege Drehmatrix:

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \cos \phi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \phi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \cos \phi \mathbb{1} + \sin \phi \mathbf{I}$$

- Matrix \mathbf{I} folgt den Multiplikationsregeln von \mathbf{i} :

$$\mathbf{I}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}$$

Betrachte Exponentialfunktion von $\phi \mathbf{I}$

$$\begin{aligned} e^{\phi \mathbf{I}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi^n \mathbf{I}^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\phi \\ \phi & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi^2 & 0 \\ 0 & \phi^2 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Merke:

Exponentialfunktion der Matrix $\phi \mathbf{I}$ führt auf 2-dimensionale Drehmatrizen

- Beachte (für Genießer):

Zusammenhang von Matrix \mathbf{I} und 2-dimensionalem ϵ -Tensor:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Woche

4.9 Diagonalisierung von Matrizen

Motivation: Matrizen diagonalisieren wird uns nicht mehr verlassen, siehe Kap. 8

- Satz:

Sei A eine reelle, symmetrische Matrix. Dann gibt es eine orthonormale Basis, die aus den Eigenvektoren von A besteht. Das bedeutet, dass A durch eine diagonale Matrix bezüglich einer orthonormalen Basis dargestellt werden kann. Die Einträge dieser Matrix sind die Eigenwerte von A .

oder

- Satz:

Sei A eine reelle, symmetrische Matrix. Dann gibt es eine orthogonale Matrix P derart, dass

$$B = P^{-1}AP = P^T AP$$

diagonal ist.

- Als die Spalten von P können die normierten Eigenvektoren von A gewählt werden.
- Physikalische Bedeutung: Die Wirkung einer diagonalen Matrix ist sehr einfach.

Beispiel:

- Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- Charakteristisches Polynom

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(5 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

$$\lambda_1 = 3.5 + \sqrt{(7/2)^2 - 6} = 6$$

$$\lambda_2 = 3.5 - \sqrt{(7/2)^2 - 6} = 1$$

- $\lambda_1 = 6$

$$-4x - 2y = 0 \quad -2x - x = 0$$

ergibt Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \text{normiert} \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = 1$

$$x - 2y = 0 \quad -2x + 4y = 0$$

ergibt Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{normiert} \quad \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

- Ergibt

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

und diagonalisierte Matrix

$$B = P^{-1}AP = P^T AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nicht alle reellen Matrizen sind in \mathbb{R} diagonalisierbar.

- Betrachte Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Man kann zeigen: Es gibt keine reelle Matrix P , die A diagonalisiert.

” A ist in \mathbb{R} nicht diagonalisierbar”

- Aber

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \quad P^{-1} = P^{T*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

- Damit

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}$$

” A ist in \mathbb{C} diagonalisierbar”

Gar nicht diagonalisierbar

- Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist gar nicht diagonalisierbar, weder in \mathbb{R} noch in \mathbb{C}

Physikalische Anwendungen:

- Trägheitstensor, kommt später
- Siehe auch Kapitel 8 Schwingungen

4.9.1 Dyadisches Produkt

- Definition: Betrachte Vektorraum \mathbb{R}^n . Definiere Abbildung

$$\otimes : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$$

durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}$$

- In Matrixschreibweise

$$x \otimes y = xy^T = |x \rangle \langle y|$$

im Unterschied zum Skalarprodukt

$$x \cdot y = x^T y = \langle x | y \rangle$$

- Dyadisches Produkt wird wichtig als Projektionsoperator und bei Basiswechseln in der Quantenmechanik

Lessons learned:

- Lineare Abbildungen lassen sich als Matrizen darstellen
- Matrizen werden nach dem "Bauklotz-Prinzip" multipliziert
- Determinanten messen Volumina
- Orthogonale Matrizen beschreiben Rotationen
- Eigenwert-Probleme lösen und Matrizen diagonalisieren: Zweithäufigste Tätigkeit eines Physikers

5 Newton'sche Mechanik

Motivation: Nach all' der Mathematik, jetzt mal Physik :-)

Raum, Zeit und Masse, die drei Basisgrößen in der Newton'schen Mechanik

- Absolute Zeit:
 - $t \in \mathbb{R}$, weltweit identisch, "absolut"
 - Weltweit synchrone Messung durch Transport von Eichuhren
 - Das ändert sich in der speziellen Relativitätstheorie

- Absoluter Raum:
 - weltweiter Euklidischer Vektorraum
 - Ortsvektoren $\vec{r}(t)$
 - Abgeleitete⁵ Größen:
 - * Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}$$

- * Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \ddot{\vec{r}}$$

"Absolutheit" ändert sich auch in der Relativitätstheorie

- Beispiel für Bewegung im Raum:
Geradlinig-gleichförmige Bewegung

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0$$

$$\vec{a}(t) = 0$$

- Absolute Masse:
 - Masse ist unabhängig von der Dynamik des Körpers
 - Das ändert sich auch ...

⁵Wortspielverdacht :-)

5.1 Die Newton'schen Gesetze

Newton:

- * 1643, † 1727
- Hauptwerk: 1687: "Philosophiae naturalis principia mathematica"

Die Newtonschen Gesetze

1. Wirken keine Kräfte, verharrt ein Körper in Ruhe oder im Zustand geradlinig-gleichförmiger Bewegung.
2. Eine Kraft \vec{F} bewirkt eine Beschleunigung

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

3. "actio gleich reactio"

Sei \vec{F}_{ij} die Kraft, die Körper j auf Körper i ausübt, so gilt:

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$$

Kommentare:

- Still acute:

PRL 98, 150801 (2007) PHYSICAL REVIEW LETTERS week ending 13 APRIL 2007

Laboratory Test of Newton's Second Law for Small Accelerations

J. H. Gundlach, S. Schlamminger, C. D. Spitzer, and K.-Y. Choi
Center for Experimental Nuclear Physics and Astrophysics, University of Washington, Seattle, Washington 98195, USA

B. A. Woodahl
Physics Department, Indiana University-Purdue University, Indianapolis, Indiana 46202, USA

J. J. Coy
Earth and Space Science Department, Saint Joseph's College, Rensselaer, Indiana 47978, USA

E. Fischbach
Physics Department, Purdue University, West Lafayette, Indiana 47907, USA
(Received 12 February 2007; published 13 April 2007)

We have tested the proportionality of force and acceleration in Newton's second law, $F = ma$, in the limit of small forces and accelerations. Our tests reach well below the acceleration scales relevant to understanding several current astrophysical puzzles such as the flatness of galactic rotation curves, the Pioneer anomaly, and the Hubble acceleration. We find good agreement with Newton's second law at accelerations as small as 5×10^{-14} m/s².

DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.150801

PACS numbers: 06.30.Gv, 04.80.Cc

Newton's second law is the equation of motion defining the field of dynamics. In its nonrelativistic form, $\vec{F} = m\vec{a}$ is perhaps the most famous and most often used equation of physics. Together with its relativistic and quantum mechanical variants, this law is implicitly tested in many applications and experiments, and its validity is simply assumed at all acceleration scales. Any deviation from $\vec{F} = m\vec{a}$ would have profound consequences as it would

standard Newtonian dynamics. The functional form of the transition between the two regimes is not specified. A smooth transition can be obtained by multiplying the right side of $\vec{F} = m\vec{a}$ by $\mu(a/a_0) = a/a_0(1 + a^2/a_0^2)^{-1/2}$, so that for $a \gg a_0$ the function $\mu \approx 1$ and standard Newtonian mechanics is recovered. The characteristic acceleration a_0 was determined from fits [4] to galactic rotation curves to be $a_0 \approx 1.2 \times 10^{-10}$ m/s².

- 1. NG widerspricht all unserer Erfahrung, aber ordnet sie am Ende sinnig
 - Erstes Newtonsche Gesetz definiert "Nullelement" in der Menge der Kräfte, das "Nullelement" in der Menge der Bewegungen nach sich zieht.
 - 1. Newtonsche Gesetz postuliert Trägheitsprinzip, von Galilei eingeführt
 - 1. Gesetz macht nur Sinn bei Angabe von Bezugssystem
 - Es kann nicht in allen Bezugssystemen gelten:
Gilt es in System S , kann es in relativ beschleunigtem System S' nicht gelten:
Körper erfährt dort Beschleunigung, obwohl keine Kraft auf ihn wirkt.
 - Bezugssystem, in dem 1. Newtonsches Gesetz gilt heißt Inertialsystem
 - * Existenz vor der Hand unklar.
 - * Für einzelne Körper existiert Koordinatentransformation, so dass Bahnkurve $r(t)$ gradlinig-gleichförmig, muss aber für alle Körper gelten.
 - * Koordinatensystem relativ zum Fixsternhimmel ist in guter Näherung Inertialsystem
 - * Koordinatensystem mit Bezugspunkt auf Erdoberfläche ist weniger gut:
 - Rotation der Erde um Sonne
 - Rotation der Erde um sich selbst
- 2. NG:

Jede Abweichung vom Nullelement der Kräfte führt zu Beschleunigungen

 - "Suchet die Kräfte": Ein komplettes Forschungsprogramm
 - Sind alle Kräfte \vec{F}_i bekannt, ergibt $m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$ die Dynamik.
 - * m : träge Masse, im Unterschied zur schweren Masse, siehe später. Ausgangspunkt Allgemeine Relativitätstheorie
 - * Kräfte addieren sich wie Vektoren (Kräfteparallelogramm)
 - Ontologie:
 - * \vec{F}_i : Ursachen
 - * $m\vec{a}$: Wirkung
 - Beachte: 1. NG folgt nicht aus 2. NG.

- Merke:

Die Newtonschen Gesetze stellen eine immense Abstraktionsleistung dar

Relativitätsprinzip:

- Sei S Bahnkurve $\vec{r}(t)$
- Sei S' um \vec{r}_0 gegen S verschoben und bewege sich mit \vec{v}_0
- Dann gilt die Galilei-Transformation:

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

- Relativitätsprinzip: Alle Inertialsysteme sind physikalisch gleichwertig
 - Die Gesetze der Klassischen Mechanik müssen invariant unter der Galilei-Transformation sein
- Siehe Übung

5.1.1 Historische Anmerkung: Aristotelische Mechanik

Aristoteles (* 384 v. Chr., † 322 v. Chr.): "Alle Dinge haben ihren Platz, den sie ihrer Natur gemäß einzunehmen bestrebt sind"

Zwei(vier-)geteilte Welt:

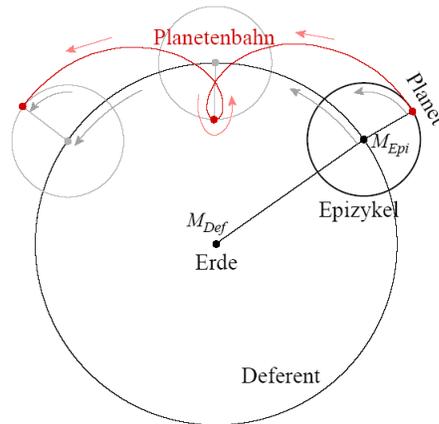
- Auf der Erde:
 - "Natürliche Bewegung", schwere Körper nach unten, leichte nach oben
 - "Erzwungene Bewegung" $\vec{v} \propto \vec{F}$, setzt direkten Kontakt voraus
- Gestirne: Bewegung nach "ewiger Harmonie": Gleichförmige Kreisbewegung

Kritik zu seiner Zeit

- Sternschnuppen
- Speerwurf
- Kein Grund, überheblich zu sein, Newton hat auch seine Grenzen

"Taylor-Entwicklung" in Kreisen, siehe Kap. 9

- Abweichung der Planetenbahnen von perfekten Kreisen schon im Altertum bekannt
- Ptolemäus (100-160 n.Chr.): Epizyklen Theorie



Newton vereinheitlicht zwei vorher getrennte Bereiche. Seine Theorie gilt für

- Bewegung der Planeten
- den fallenden Apfel

Vereinheitlichung als Ansatz hat sich in der Physik bewährt

- Elektromagnetismus
- Elektromagnetismus und schwache Kraft
- To do: Große Vereinheitlichung (EM, schwache & starke Kraft)
- To do: Theory of everything mit Gravitation

5.1.2 Praxis der Newtonschen Mechanik

- $\vec{r}(t)$ aus $m\vec{a}(t) = m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$ berechenbar, wenn
 - $\vec{F}(t)$ bekannt
 - Anfangsbedingungen $\vec{r}(0), \dot{\vec{r}}(0)$ bekannt
 - Aufgabe: Lösung einer Differentialgleichung, siehe Kap. 7

- Im allgemeinen kann $\vec{F}(t)$ beliebig kompliziert sein, z.B. von Vorgeschichte abhängen.

- Häufig: $F(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$

Dann

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$$

die Bewegungsgleichung, eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung

- m die träge Masse
- Gilt $\vec{F}(\vec{r}(t))$, so handelt es sich um ein Kraftfeld: $\vec{F} : E^3 \rightarrow V^3$, denke an Gravitationsfeld.

5.2 Kraftgesetze ermitteln

- Den Spiess umdrehen
- Kennt man die verursachende Kraft nicht, aber die Bahnkurve $\vec{r}(t)$, lässt sich die Kraft ermitteln.
- So geschehen durch Newton für die Gravitationskraft.
- Hand-waving Version:
 - Nehme an, die Planeten würden sich auf Kreisbahnen bewegen
 - Für Kreisbahn gilt

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{r}} &= \begin{pmatrix} -r\omega \sin \omega t \\ r\omega \cos \omega t \end{pmatrix} \\ \ddot{\vec{r}} &= \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos \omega t \\ -r\omega^2 \sin \omega t \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}\end{aligned}$$

- 3. Kepler Gesetz:

$$r^3 \propto T^2 \propto \omega^{-2}$$

– Für Bewegung auf Kreis gilt

$$\ddot{r} \propto \omega^2 r, \quad \omega^{-2} \propto \frac{r}{\ddot{r}}$$

Zusammen

$$\ddot{r} \propto \frac{1}{r^2}$$

Ergibt Gravitationsgesetz :-)

5.3 Wichtige Kraftgesetze

Ontologie:

- $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$
- \vec{F}_i : Ursachen
- $m\vec{a}$: Wirkung
- "Suchet die Kräfte": Ein komplettes Forschungsprogramm

Beispiele:

- $\vec{F} = \vec{const}$

Oft gute Näherung in kleinen Raumzeitbereichen. Taylorentwicklung nullter Ordnung !

Beispiel: Gravitationsfeld der Erde an der Oberfläche: $\vec{F} = m\vec{g}$, m schwere Masse, $||\vec{g}|| = 9.81m/s^2$

Experimentell bestens bestätigt: schwere Masse = träge Masse.

Ausgangspunkt der Allgemeinen Relativitätstheorie

Lösung von

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = m\vec{g}$$

durch zweimalige Integration mit Anfangswerten \vec{v}_0 und \vec{r}_0

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{g}}{2}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{r}_0$$

Alle Körper fallen gleich schnell, empirische Überprüfung und Konsequenzen 7. Woche

- Harmonisches Kraftgesetz

Betrachte lineare, zeitunabhängige Kraft, die der Auslenkung aus Ruhelage entgegen wirkt:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -D\vec{r}$$

Gilt bei Federpendel oder Pendel bei kleiner Auslenkung, Taylor-Entwicklung erster Ordnung !

Bewegungsgleichung

$$m\ddot{r} = -Dr$$

Allgemeine Lösung

$$r(t) = a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t) = c \operatorname{Re}(e^{i\omega_0 t + \phi}), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Wird Reibung mit $-k\dot{r}$ und zeitabhängige äußere Kraft $\vec{F}(t)$ hinzugefügt, ergibt sich

$$m\ddot{r} + k\dot{r} + Dr = F(t)$$

eine erzwungene Schwingung mit Resonanzphänomenen, die in Kapitel 8 behandelt werden.

- Gravitationskraft

Newtons großer Verdienst

Kraft von Masse m_2 auf m_1

$$\vec{F}_{G_{12}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}, \quad \vec{r} = P_1 \vec{P}_2, \quad G = 6.667 \times 10^{-11} \text{m}^3 / (\text{kg s}^2)$$

- Lorentz-Kraft: geschwindigkeitsabhängig

Elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$, Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$

$$\vec{F}_L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = e(\vec{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t))$$

- Coulomb-Kraft

Ladungen q_1, q_2

$$\vec{F}_{C_{12}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$$

Betrachte 2 Protonen:

- Anziehung auf Grund der Gravitation
- Abstoßung auf Grund von Coulomb

Abstoßung durch Coulomb $\sim 10^{36}$ mal stärker als Anziehung durch Gravitation: Gravitation auf kleinen Skalen i.d.R. vernachlässigbar

Betrachte Universum:

- Recht homogen gilt: Anzahl negativer Ladungen = Anzahl positiver Ladungen
Coulomb mittelt sich raus
- Gravitation immer anziehend, es gibt keine negative Masse: Spielt auf großen Skalen den Haupteffekt

- Reibungs-Kräfte

Im allgemeinen sehr kompliziert: Reibungskraft phänomenologisch

- Gleitreibung fester Körper

$$\vec{F}_R = -\mu |\vec{F}_N| \frac{\vec{v}}{v}, \quad \text{Normalkraft: } \vec{F}_N = m\vec{g}$$

- Für viskose, Stokes'sche Reibung, kleine Reynoldszahl

$$\vec{F}_R = -\kappa \vec{v}$$

- Bei "Luftreibung", große Reynoldszahl

$$\vec{F}_R = -\frac{1}{2} c_w \rho A v^2 \frac{\vec{v}}{v}$$

5.4 Erhaltungssätze

5.4.1 Impulserhaltung

- Ein einzelnes freies, d.h. keinen äußeren Kräften ausgesetztes, Teilchen hat konstanten Impuls

$$\dot{\vec{p}} = 0 \quad \text{für } \vec{F} = 0, \quad \text{also } \vec{p}(t) = \text{const}$$

- Für System von N Teilchen, die gegenseitig Kräfte aufeinander ausüben, ist in Abwesenheit äußerer Kräfte der Gesamtimpuls \vec{P} erhalten:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{R}}$$

- Mit Gesamtmasse $M = \sum_{i=1}^N m_i$ und dem Schwerpunkt

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

Beweis:

- Sei \vec{F}_{ij} die von Teilchen j auf Teilchen i ausgeübte Kraft. Die auf Teilchen i ausgeübte Kraft ist dann:

$$\vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}$$

- Damit

$$\begin{aligned} \dot{\vec{P}} &= \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} = \sum_{i < j} \vec{F}_{ij} + \sum_{i > j} \vec{F}_{ij} \stackrel{3. \text{ NG}}{=} \sum_{i < j} \vec{F}_{ij} - \sum_{i > j} \vec{F}_{ji} \\ &= \sum_{i < j} \vec{F}_{ij} - \sum_{j > i} \vec{F}_{ij} = 0 \end{aligned}$$

5.4.2 Drehimpulserhaltung

- Der Drehimpuls \vec{L} eines Teilchens am Orte \vec{r} ist definiert durch:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

- Das Drehmoment unter dem Einfluss einer Kraft \vec{F} ist

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Somit:

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$$

- Da

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} = 0$$

folgt

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{N}$$

- Der Drehimpuls eines Teilchens, auf das kein Drehmoment wirkt, ist zeitlich konstant.
- Übung: Gesamtdrehimpuls von System von n Teilchen bleibt in Abwesenheit äußerer Kräfte erhalten, falls Kräfte zwischen Teilchen Zentralkräfte sind.

Energieerhaltung im nächsten Kapitel

Lessons learnt:

- Newtonsche Gesetze: Immense Abstraktionsleistung
- Newtonsche Gesetze bilden selbstkonsistenten Rahmen der klassischen Physik
- Forschungsprogramm: Suchet die Kräfte
- Newton's zweites Gesetz führt auf Bewegungsgleichungen, in der Regel Differentialgleichungen 2. Ordnung

6 Vektoranalysis

Motivation:

- Kräfte sind Felder: Verallgemeinerung der Kurvendiskussion und Integrationsrechnung aus der Schule auf's Höherdimensionale
- Von $y = f(x)$, $x, y \in \mathbb{R}$ nach $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$

6.1 Felder, Kurven und Flächen

- Skalare Felder $\phi(\vec{x})$

$$\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \vec{x} \mapsto \phi(\vec{x})$$

Beispiele:

- Temperaturfelder
- Gravitationspotential
- Energiefelder, $|\vec{E}(\vec{x})|^2$

Skalare Funktion n Veränderlicher

- Vektorfelder $\vec{F}(\vec{x})$

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \vec{x} \mapsto \vec{F}(\vec{x})$$

Beispiele:

- Geschwindigkeitsfelder
- Gravitationskraft
- Elektrisches, magnetisches Feld

Bemerkung: Ist $\vec{F}(\vec{x})$ linear, landen wir bei Matrizen

- Kurven $\vec{x}(t)$

$$\vec{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad t \mapsto \vec{x}(t)$$

Beispiele:

- Erde um die Sonne

– Ball ins Tor

- Flächen $\vec{x}(u, v)$

$$\vec{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (u, v) \mapsto \vec{x}(u, v)$$

Beispiel:

– Kugeloberfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Aufgelöst nach z

$$z = \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

Ergibt Parametrisierung der Kugeloberfläche

$$\vec{K}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ z(u, v) \end{pmatrix}, \quad z(u, v) = \pm \sqrt{r^2 - u^2 - v^2}$$

6.2 Integration in mehreren Variablen

6.2.1 Wegintegrale

Bezeichnung: Auch Linien- oder Kurvenintegral

Wegintegrale lassen sich über Skalar- und über Vektorfelder ausführen

Wegintegrale über Skalarfelder

Motivation:

Wir wollen die Länge einer Kurve berechnen

Das einfachste Wegintegral ist das über ein Skalarfeld, das identisch 1 ist. Dies ergibt die Bogenlänge

- Gegeben eine Kurve $\gamma \simeq \vec{x}(t)$
- Ziel: Bestimme Länge der Kurve zwischen Punkten $\vec{x}(t_i)$ und $\vec{x}(t_f)$

- Für zwei infinitesimal benachbarte Punkte $\vec{x}(t)$ und $\vec{x}(t + dt)$ gilt mit Taylor-Entwicklung

$$d\vec{s} = \vec{x}(t+dt) - \vec{x}(t) = \vec{x}(t) + \frac{d\vec{x}(t)}{dt}dt + \frac{1}{2} \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}dt^2 + \dots - \vec{x}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}dt + O(dt^2)$$

$O(dt^2)$: Terme der Ordnung dt^2 und höher: Der Rest der Taylorentwicklung

Definiere:

$$d\vec{s} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}dt, \quad \text{das } \underline{\text{Bogenlängenelement}}$$

- Für die Länge folgt

$$ds = \sqrt{d\vec{s} \cdot d\vec{s}} = \sqrt{\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt}} dt$$

Damit die Bogenlänge L

$$L = \int_{\gamma} ds = \int_{t_i}^{t_f} \left| \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \right| dt$$

- Parametrisierung durch t ist eine Variablensubstitution.

Beispiel:

- Betrachte Funktion $y = f(x)$
- Ergibt, slight abuse of Notation :-)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Damit folgt für Bogenlängenelement

$$ds = \sqrt{\left(\frac{d\vec{x}(x)}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{\left(\frac{dx_1(x)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dx_2(x)}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

- Damit die Länge L

$$L = \int_{x_i}^{x_f} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Wegintegrale über Vektorfelder

Motivation:

Wir wollen die Arbeit W ausrechnen, die mit der Bewegung eines Körpers in einem Kraftfeld \vec{F} entlang eines Weges γ verbunden ist.

- Ist das Kraftfeld konstant, der Weg eine Gerade und \vec{x} ein Vektor vom Anfang zum Ende des Weges, so folgt:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{x}$$

Gelten die Voraussetzungen nicht, gilt

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

- Der Weg γ wird durch $\vec{x}(t)$ parametrisiert. Dieses entspricht wie oben einer Variablensubstitution
- Mit

$$d\vec{s} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} dt = \dot{\vec{x}}(t) dt$$

folgt

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt} dt \quad (13)$$

Beispiel, der Einfachheit halber zwei-dimensional

- Gegeben sei das Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 \\ x_1 x_2^2 \end{pmatrix}$$

- Der Weg γ sei eine Gerade, die den Ursprung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit dem Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ verbindet

- Parametrisierung:

$$\gamma : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\begin{pmatrix} ds_1 \\ ds_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 dt \\ \dot{x}_2 dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2dt \\ dt \end{pmatrix}$$

- Integral berechnen

$$\begin{aligned} W &= \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} x_1^2 x_2 ds_1 + x_1 x_2^2 ds_2 \\ &= \int_0^1 (2t)^2 t (2dt) + 2t t^2 dt \\ &= \int_0^1 (8t^3 + 2t^3) dt \\ &= 10 \int_0^1 t^3 dt = 10 \left. \frac{t^4}{4} \right|_0^1 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Zwei wichtige Eigenschaften

- Die Parametrisierung des Weges ist nicht eindeutig

Am obigen Beispiel: Die Parametrisierungen

$$\begin{aligned} \vec{x}_1(t) &= \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} & 0 \leq t \leq 1 \\ \vec{x}_2(t) &= \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \end{pmatrix} & 0 \leq t \leq 0.5 \\ \vec{x}_3(t) &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{t} \\ \sqrt{t} \end{pmatrix} & 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

ergeben die selben Graden und das selbe Ergebnis für das Integral.

Es gilt allgemein:

Der sich ergebene Wert des Wegintegrals ist unabhängig von der Parametrisierung.

Übung

- Durchlaufrichtung

Wird die Kurve rückwärts durchlaufen folgt

$$W_{-\gamma} = \int_{-\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{t_f}^{t_i} \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) dt = - \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) dt = - \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -W_{\gamma}$$

also Vorzeichenumkehr, denke an "Berg hoch" und "Berg runter".

6.2.2 Flächenintegrale skalarer Funktionen

- Betrachte Funktion $f(x, y)$ über rechteckigem Gebiet $\Omega = [x_i, x_f] \times [y_i, y_f]$.
Denke an Berghöhe $h = f(x, y)$.

Das von $f(x, y)$ und Ω eingeschlossene Volumen ("Bergvolumen") ist gegeben durch

$$\int_{\Omega} dx dy f(x, y) = \int_{x_i}^{x_f} dx \int_{y_i}^{y_f} dy f(x, y) = \int_{y_i}^{y_f} dy \int_{x_i}^{x_f} dx f(x, y), \quad \text{Satz von Fubini}$$

Berechnung von $\int_{x_i}^{x_f} dx \int_{y_i}^{y_f} dy f(x, y)$

- Führe zuerst Integral über dy aus
 - Betrachte dabei alle x -Abhängigkeiten als Konstanten
 - Ergebnis hängt nur noch von x ab
 - Führe Integral über dx aus
- Beispiel:

$$\Omega = [0, 1] \times [2, 3], f(x, y) = x^2 + y$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_2^3 dy (x^2 + y) &= \int_0^1 dx \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_{y=2}^{y=3} = \int_0^1 dx \left(x^2 + \frac{5}{2} \right) \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{5}{2} x \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} + \frac{5}{2} = \frac{17}{6} \end{aligned}$$

Zur Probe andersrum

$$\begin{aligned} \int_2^3 dy \int_0^1 dx (x^2 + y) &= \int_2^3 dy \left[\frac{x^3}{3} + xy \right]_{x_i=0}^{x_f=1} = \int_2^3 dy \left(\frac{1}{3} + y \right) \\ &= \left[\frac{1}{3}y + \frac{y^2}{2} \right]_{y_i=2}^{y_f=3} = 1 + \frac{9}{2} - \frac{2}{3} - 2 = \frac{17}{6} \end{aligned}$$

Bei nicht rechteckigen Gebieten hängen die Integrationsgrenzen y_i, y_f , resp. x_i, x_f , von x , resp. von y ab.

Beispiel:

- $\Omega = \text{Einheitskreis} = x^2 + y^2 \leq 1$, wieder $f(x, y) = x^2 + y$
- Mögliche Parametrisierung der Fläche:

$$x \in [-1, 1], y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$$

- Es folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} dx dy f(x, y) &= \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy (x^2 + y) = \int_{-1}^1 dx \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int_{-1}^1 dx 2x^2 \sqrt{1-x^2} \\ &= 2 \left[-\frac{x}{4} \sqrt{(1-x^2)^3} + \frac{1}{8} (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{4} \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

- Häßlich
- Oft läßt sich Integration durch Wahl geeigneter Koordinaten vereinfachen.
- Bei Integration über Kreis: Besser Polarkoordinaten (r, ϕ) als kartesische Koordinaten (x, y)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}$$

Das infinitesimale Flächenelement

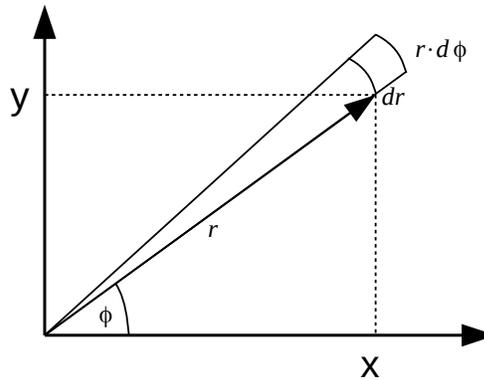
- Laxe Formulierung

- In kartesischen Koordinaten ist das infinitesimale Flächenelement dA zwischen (x, y) , $(x + dx, y)$, $(x, y + dy)$, $(x + dx, y + dy)$:

$$dA = dx dy$$

- In Polarkoordinaten ist das infinitesimale Flächenelement dA zwischen (r, ϕ) , $(r + dr, \phi)$, $(r, \phi + d\phi)$, $(r + dr, \phi + d\phi)$:

$$dA = r dr d\phi$$



- Mathematische Formulierung

Die Substitutionsregel (als Umkehrung der Kettenregel)

Erinnere

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

In höheren Dimensionen:

$$\int_U f(\vec{g}(\vec{x}))|\det Dg(\vec{x})|d\vec{x} = \int_V f(\vec{y})d\vec{y}$$

mit Funktionalmatrix

$$Dg(x) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{array} \right) \Bigg|_{\vec{x}}$$

det $Dg(x)$ beschreibt den Übergang von einem infinitesimalen Flächenelement zum andern

Hier:

$$Dg(r, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}$$

Damit:

$$|\det Dg(r, \phi)| = |r \cos^2 \phi + r \sin^2 \phi| = r$$

und

$$dx dy = r dr d\phi$$

Zusammenhang

- Weil infinitesimal reicht erste Ableitung, quasi Taylor-Entwicklung 1. Ordnung
- Determinanten messen (wieder mal) Volumen
- Vertiefung in der Übung

Damit die analoge Rechnung wie oben:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} dx dy (x^2 + y) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r dr d\phi (r^2 \cos^2 \phi + r \sin \phi) \\ &= \int_0^1 dr r \int_0^{2\pi} d\phi (r^2 \cos^2 \phi + r \sin \phi) \\ &= \underbrace{\int_0^1 dr r^3}_{=1/4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \cos^2 \phi}_{=\pi} + \int_0^1 dr r^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \sin \phi}_{=0} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

- Elegant

6.2.3 Volumenintegrale skalarer Felder

Analog zu Flächenintegralen nun mit skalarlem Feld $f(x, y, z)$ und Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ in variabler Schreibweise

$$\int_{\Omega} dx dy dz f(x, y, z) = \int_{\Omega} dV f(\vec{r}) = \int_{\Omega} dr^3 f(\vec{r}) = \int_{\Omega} d\vec{r} f(\vec{r}) =$$

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\Omega} f(\vec{r}) dV = \int_{\Omega} f(\vec{r}) dr^3 = \int_{\Omega} f(\vec{r}) d\vec{r}$$

Beispiel:

- M : Gesamtmasse von Körper mit Ausdehnung Ω und Massendichte $\rho(\vec{r})$

$$M = \int_{\Omega} d\vec{r} \rho(\vec{r})$$

Ist Ω rotationssymmetrisch, i.e. eine Kugel, dann analog zu Polarkoordinaten in \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^3 Kugelkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad r > 0, 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$$

Funktionalmatrix:

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix}$$

In der Übung:

$$dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

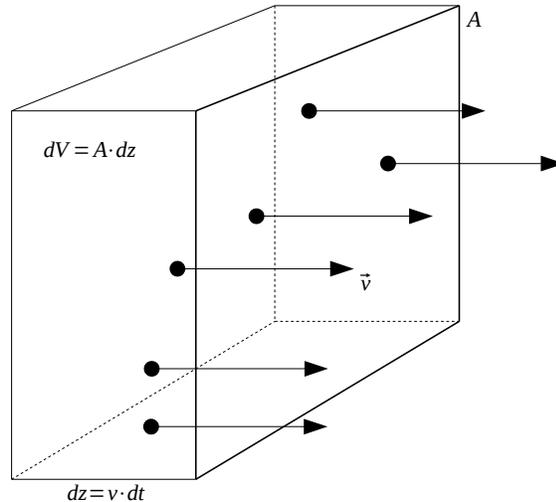
Volumen der Kugel:

$$V = \int_{\Omega} dx dy dz = \underbrace{\int_0^R dr r^2}_{=R^3/3} \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \sin \theta}_{=2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=2\pi} = \frac{4\pi}{3} R^3$$

6.2.4 Oberflächenintegrale von Vektorfeldern

Das Integral eines Vektorfeldes über eine Fläche misst den Fluss des Vektorfeldes durch die Fläche.

- Beispiel
 - Betrachte Fläche in x - y -Ebene, die von Flüssigkeit mit Geschwindigkeit \vec{v} durchströmt wird.



- Zeigt \vec{v} in z -Richtung, steht also senkrecht auf der x - y -Ebene, ist der Volumendurchsatz dV eines infinitesimalen Flächenelements $dA = dx dy$ im Zeitintervall dt :

$$dV = dt |\vec{v}(x, y)| dA$$

Ist $\vec{v}(x, y)$ nicht senkrecht zur Fläche, folgt

$$dV = dt \vec{v}(x, y) \cdot d\vec{A}, \quad \text{mit } d\vec{A} = \vec{n}_A(x, y) dA$$

- $\vec{n}_A(x, y)$ ist der Normalenvektor von A im Punkte (x, y) .

- Der Gesamtfluss \dot{V} ergibt sich durch Integration

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \int_A \vec{v}(x, y) \cdot d\vec{A} = \int_A dx dy \underbrace{\vec{v}(x, y) \cdot \vec{n}_A(x, y)}_{\in \mathbb{R}}$$

Berechnung des Flusses führt also auf ein Flächenintegral einer skalaren Funktion, siehe Kap. 6.2.2.

- Fluss eines Vektorfeldes durch geschlossene Fläche, z.B. Kugeloberfläche ist gegeben durch

$$\dot{V} = \oint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Konvention: \vec{n}_A weist aus dem umschlossenen Volumen Ω hinaus.

6.3 Partielle und totale Ableitung

6.3.1 Partielle Ableitung

- Im eindimensionalen galt für die Ableitung

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Im mehrdimensionalen wird h zu einem Vektor \vec{h}
- Partielle Ableitungen sind die Ableitungen in Richtung der Koordinatenachsen

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = f_{x_i}(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

- Analog zur mehr-dimensionalen Integration:
Bei $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}$ betrachte alle x_j mit $j \neq i$ als Konstanten
- Beispiel:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3 + x_1$$

ergibt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = 2x_1 x_2^3 + 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = 3x_1^2 x_2^2$$

- Höhere partielle Ableitung, z.B. $f_{x_i x_j}$ erhält man durch weiteres partielles Differenzieren.
- Satz von Schwarz: Sind die partiellen Ableitungen stetig, gilt:

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$$

Ergo: Reihenfolge der partiellen Differentiationen darf vertauscht werden

Gilt entsprechend auch für höhere partielle Ableitungen

6.3.2 Totale Ableitung

- Häufig gilt für x_i : $x_i = x_i(t)$. Dann folgt mit der mehr-dimensionalen Kettenregel

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

die totale Ableitung von f nach t .

- Betrachte $f(x, y)$

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Beachte: $\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t}$

- Besonders wichtig: Explizite Zeitabhängigkeit
 - Funktion $f(x(t), y(t))$ hängt implizit, i.e. über x und y , von der Zeit t ab.
 - $f(x(t), y(t), t)$ drückt explizite Zeitabhängigkeit der Funktion aus.
 - Beispiel: Zeitabhängige Kräfte
 - Totale Ableitung von $f(x(t), y(t), t)$

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t), t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Totales Differential als Übung

6.4 Ableitungen von Feldern

- Gradient eines skalaren Feldes

Sei $\phi(\vec{x})$ ein skalares Feld, so ist sein Gradient

$$\vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x\phi \\ \partial_y\phi \\ \partial_z\phi \end{pmatrix}$$

- Anschauung: Der Gradient beschreibt die Richtung des steilsten Anstiegs des skalaren Feldes.
- Formales Beispiel:

$$\phi(x, y, z) = x^2y - xyz, \quad \vec{\nabla}\phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy - yz \\ x^2 - xz \\ -xy \end{pmatrix}$$

- Anschauliches Beispiel:
Metallblock: Rechts heizen, links kühlen

Temperaturverlauf:

$$\phi(x, y, z) = \alpha x$$

$$\vec{\nabla}\phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\vec{\nabla}$ heißt auch Nabla-Operator⁶
- In Analogie zu ein-dimensionalem Fall $f(x)$ hat die Funktion mehr-dimensionaler Veränderlicher $f(\vec{x})$ einen stationären Punkt für

$$\vec{\nabla}f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = 0$$

Beachte: Nicht alle stationären Punkte sind Extrempunkte

- Im ein-dimensionalen

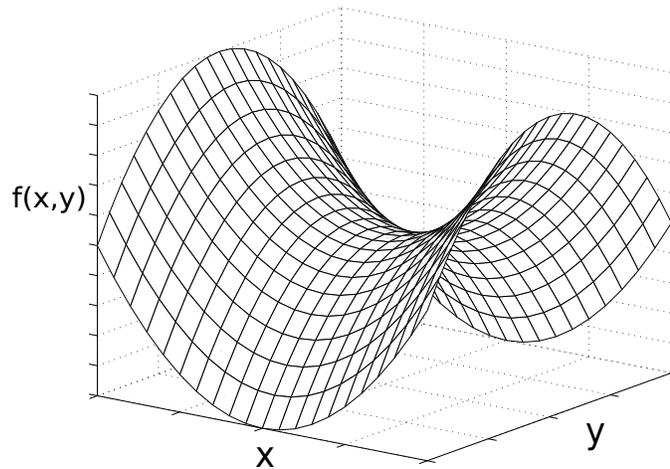
$$f(x) = x^3, \quad f'(0) = f''(0) = 0$$

kann es einen Wendepunkt geben

- Im zwei-dimensionalen, betrachte den hyperbolischen Paraboloiden

$$f(z, y) = x^2 - y^2$$

⁶Von assyrisch für Harfe



$$f_x = 2x, \quad f_y = -2y$$

ein Sattelpunkt bei $(0, 0)$

- Ein Feld $\vec{F}(\vec{r})$, das sich als Gradient eines skalaren Feldes ergibt oder schreiben läßt, heißt Gradientenfeld.

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x \phi(\vec{r}) \\ \partial_y \phi(\vec{r}) \\ \partial_z \phi(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

- Divergenz eines Vektorfeldes

Die Divergenz eines Vektorfeldes \vec{F} ergibt sich durch das Skalarprodukt:

$$\operatorname{div} \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

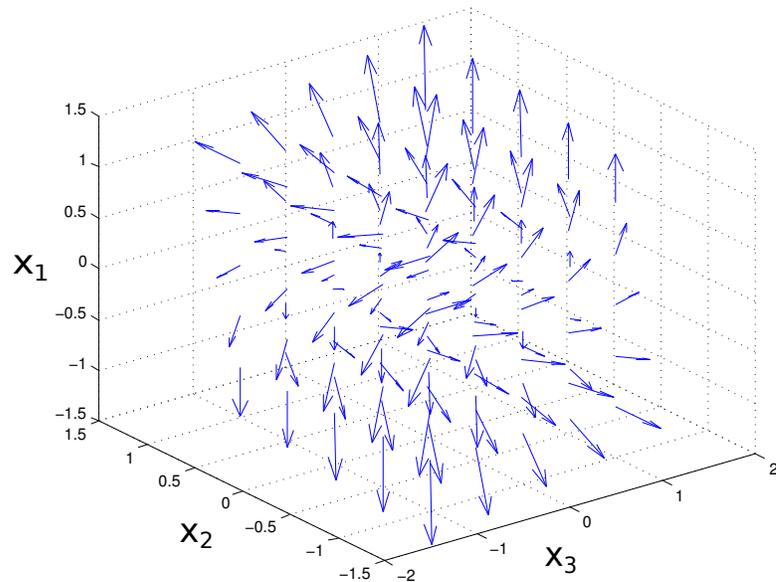
Anschauung:

- Die Divergenz beschreibt die Quellstärke.
- Divergenz des Gravitationsfeldes gibt die erzeugende Massendichte, Kap. 6.7.2
- Divergenz des elektrischen Feldes die erzeugende Ladungsdichte.
Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

Beispiel

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 1 + 1 + 1 = 3$$

- Rotation eines Vektorfeldes

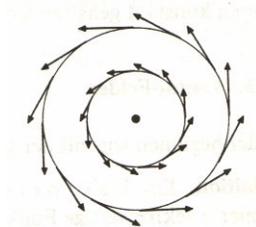
Die Rotation eines Vektorfeldes \vec{F} ergibt sich aus dem Kreuzprodukt:

$$\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- Anschauung: Die Rotation misst die Wirbelstärke eines Vektorfeldes, z.B. des magnetischen Feldes.

– Beispiel

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

– Man kann zeigen: Gilt $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, so existiert eine Stammfunktion G von \vec{F} mit

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

– Ein Feld $\vec{H}(\vec{r})$, das sich als Rotation eines Vektorfeldes ergibt oder schreiben läßt, heißt Rotationsfeld:

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{F}$$

9. Woche

- Laplace-Operator

Die Divergenz des Gradienten

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

liefert den Laplace-Operator:

$$\Delta := \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Der Laplace-Operator ist in der Elektrodynamik und der Quantenmechanik von zentraler Bedeutung, siehe auch Kap. 6.7.2.

- Nützliche Identitäten, Beweise als Übung

Für jedes skalare Feld ϕ gilt:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0$$

Merke: Gradientenfelder sind rotationsfrei

Für jedes Vektorfeld \vec{F} gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$$

Merke: Rotationsfelder sind divergenzfrei

Merke: Konkret rechnet man mit $\vec{\nabla}$ wie mit einem normalen Vektor aus \mathbb{R}^3 , es gilt aber natürlich nicht $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{F} \cdot \vec{\nabla}$.

6.5 Integralsätze

Erinnerung: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b \frac{d}{dx} f(x) dx = f(b) - f(a) \quad (14)$$

- Das Argument des Integrals ist durch die Operation des Differentialoperators $\frac{d}{dx}$ auf die Funktion $f(x)$ gegeben.
- Die rechte Seite ist durch Auswertung von $f(x)$ auf dem Rand des Integrationsintervalls $[a, b]$ gegeben.
- Jedem vernünftigen Gebiet Ω in \mathbb{R}^n kann man einen Rand zuordnen.
- Der Rand $\partial\Omega$ "lebt" in \mathbb{R}^{n-1}

Beispiele

- Kreisfläche in \mathbb{R}^2 , Rand in \mathbb{R}^1
- Quader in \mathbb{R}^3 , Rand in \mathbb{R}^2

Der Stokes'sche und der Gauß'sche Satz verallgemeinern den Hauptsatz Gl. (14) auf höherdimensionale Integrale über Differentiale von Vektorfeldern im \mathbb{R}^n , die durch Integrale dieser Vektorfelder selbst im \mathbb{R}^{n-1} ausgedrückt werden.

6.5.1 Der Stokes'sche Satz

Der Stokes'sche Satz führt das Flächenintegral der Rotation eines Vektorfeldes zurück auf ein Wegintegral des Vektorfeld entlang der die Fläche berandenden Kurve:

$$\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

mit

$$d\vec{A} = \vec{n}(x, y) dA$$

6.5.2 Der Gauß'sche Satz

Der Gauß'sche Satz führt das Volumenintegral der Divergenz eines Vektorfeldes zurück auf ein Oberflächenintegral des Vektorfeldes über die das Volumen begrenzende Fläche:

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) d\vec{r} = \oint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

- Das Volumenintegral über die Divergenz eines Feldes \vec{F} ist gleich dem Fluss des Feldes durch die das Volumen begrenzende Oberfläche.
- Dies rechtfertigt die Interpretation der Divergenz als Quellstärke

6.6 Konservative Felder

6.6.1 Vier äquivalente Definitionen

- Definition: Ein Feld heißt konservativ, wenn das Wegintegral nicht vom Weg, sondern nur von Anfangs- und Endpunkt abhängt.

- Wegintegrale über Gradientenfelder
Sei \vec{F} der Gradient einer skalaren Funktion f

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f$$

Das Wegintegral über eine Kurve γ ist mit Gl. (13)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} &= \int_{\gamma} \vec{\nabla} f(\vec{l}) \cdot d\vec{l} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{\nabla} f(\vec{l}(t)) \cdot \frac{d\vec{l}(t)}{dt} \right) dt \\ &\stackrel{KR}{=} \int_{t_1}^{t_2} \frac{df(\vec{l}(t))}{dt} dt = f(\vec{l}(t_2)) - f(\vec{l}(t_1)) \end{aligned}$$

mit der mehrdimensionaler Kettenregel

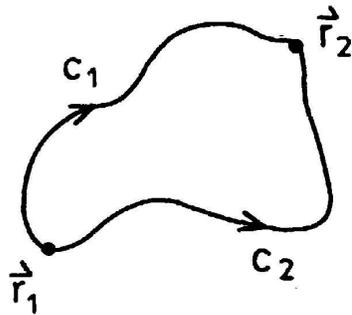
$$\frac{df(\vec{l}(t))}{dt} = \vec{\nabla} f(\vec{l}(t)) \cdot \frac{d\vec{l}(t)}{dt}$$

Das Wegintegral über Gradientenfeld hängt also nicht vom Weg γ , sondern nur von den Endpunkten ab.

- Vektorfeld $\vec{F}(r)$ ist genau dann konservativ, wenn Wegintegral über jeden geschlossenen Weg verschwindet.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

Beweis: Wähle zwei beliebige Wege γ_1 und γ_2 zwischen den Punkten \vec{r}_1 und \vec{r}_2



Zwei Wege von r_1 nach r_2

Ein geschlossener Weg ergibt sich, wenn man zuerst γ_1 und dann γ_2 in umgekehrter Richtung durchläuft

Es gilt also:

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{l} - \int_{\gamma_2} \vec{F} d\vec{l} = 0 \iff \int_{\gamma_1} \vec{F} d\vec{l} = \int_{\gamma_2} \vec{F} d\vec{l}$$

- Ist $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ, folgt: \Leftarrow
- Verschwindet Wegintegral über geschlossenen Weg, folgt: \Rightarrow
- Nach dem Stokes'schen Satz verschwinden beliebige geschlossene Wegintegrale genau dann, wenn \vec{F} rotationsfrei ist, also

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$$

Damit vier äquivalente Definitionen konservativer Felder \vec{F} :

- (i.) Das Wegintegral über \vec{F} hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab.
- (ii.) \vec{F} ist Gradient einer skalaren Funktion: $\vec{F} = \vec{\nabla} f$
- (iii.) Geschlossene Wegintegrale über \vec{F} verschwinden.
- (iv.) \vec{F} ist rotationsfrei: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ im gesamten Raum

Liegt \vec{F} explizit vor, ist (iv.) der einfachste Check.

Die skalare Funktion f wird in der Regel mit U bezeichnet und heißt Potential.
Konventionmässig wird es mit einem Minuszeichen definiert

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = - \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} \\ \frac{\partial U}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

6.6.2 Beispiele

Beispiele: (nicht) konservativer Kraftfelder:

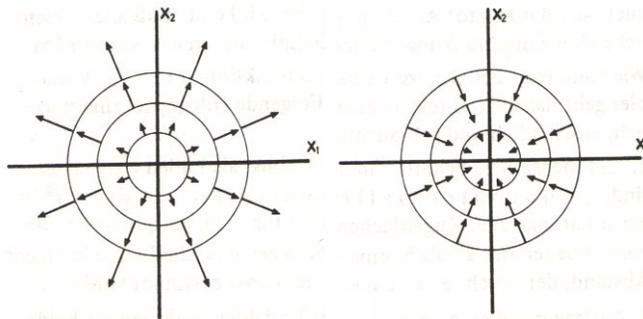
- Gravitationskraft

$$\vec{F}_G = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}, \quad U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

- Zentralkraftfelder

– rotationssymmetrisch:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \vec{r}/r$$



konservativ

– Allgemeiner Fall

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r}) \vec{r}/r$$

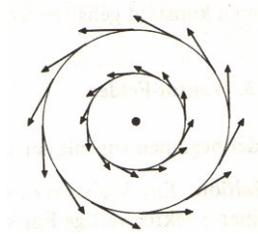
nicht konservativ, Hörerumfrage

- Harmonische Kraft, siehe Kap. 8

$$\vec{F}(\vec{r}) = -D\vec{r} \quad U(r) = \frac{D}{2} r^2$$

- Nichtkonservatives Feld:

$$\text{Betrachte: } \vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$



- Besonders schön:

$$F = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, z)$$

siehe Übung

- Eindimensionale Dynamik

$F(x)$ ist immer konservativ. Grund: es existiert immer $U(x)$ mit

$$F(x) = -\frac{d}{dx}U(x)$$

nämlich die Stammfunktion von $-F(x)$.

- Da Kraftfeld konservativ, nutze Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E = \text{const}$$

Damit:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2/m(E - U(x(t)))}$$

- Dieses heißt “Erstes Intregral”

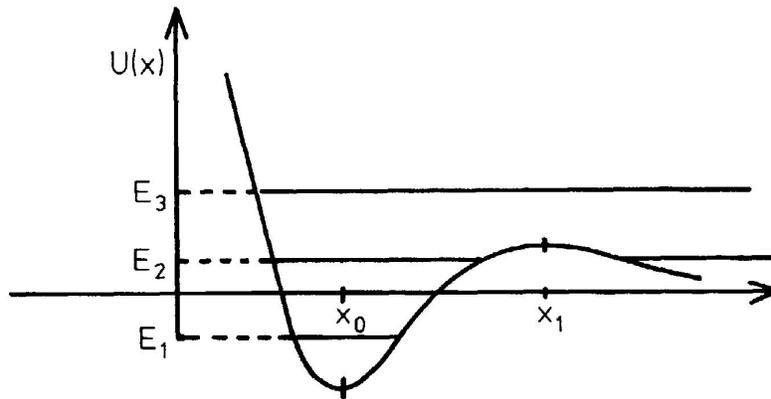
$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{x} dt'}{\sqrt{2/m(E - U(x(t)))}} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx'}{\sqrt{2/m(E - U(x'))}} = \int_{t_0}^t dt' = t_2 - t_1$$

- Läßt sich das Integral in geschlossener Form lösen, so ergibt sich:

$$x = x(t; E, x_1), \quad v_1 = \sqrt{2/m(E - U(x_1))},$$

da $E = T + U \geq U$

- Ansonsten lernt man zumindest, wie lange es von $x(t_1)$ bis $x(t_2)$ gedauert hat :-)



Ein Beispiel einer Potentialfunktion für eine eindimensionale Bewegung mit den erlaubten Aufenthaltsbereichen für verschiedene Energien

6.6.3 Energieerhaltung

Betrachte Massenpunkt in zeitunabhängigem konservativen Kraftfeld.

- Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

- Multipliziere mit $\dot{\vec{r}}$ und integriere über t von t_1 bis t_2

- Typischer Trick, um von Kräften zu Energien zu kommen
- LHS:

$$m \int_{t_1}^{t_2} dt \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}^2) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \Big|_{t_1}^{t_2} = T(t_2) - T(t_1)$$

mit $T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2$ die kinetische Energie

- RHS:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \int_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Da Kraftfeld konservativ, gilt :

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}), \quad \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -U(\vec{r}_2) + U(\vec{r}_1)$$

Somit

$$T(\dot{\vec{r}}(t_2)) + U(\vec{r}(t_2)) = T(\dot{\vec{r}}(t_1)) + U(\vec{r}(t_1))$$

Ergo: Die Größe

$$E = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2(t) + U(\vec{r}(t))$$

ist für konservative Kraftfelder eine Erhaltungsgröße.

- E : Gesamtenergie
- T : Kinetische Energie
- U : Potentielle Energie

Alternativer Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{m}{2} \frac{d\dot{\vec{r}}^2}{dt} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= m \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \vec{\nabla}U \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= (\vec{F} + \vec{\nabla}U) \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned}$$

Ergo, Energieerhaltung falls

- Kraftfeld als Gradientenfeld darstellbar, i.e. konservativ, namensgebend.
- Potential und damit Kraftfeld zeitunabhängig.

6.7 Gravitationsgesetz

Gravitationskraft zwischen zwei Punktmassen M und m :

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{\|\vec{r}_m - \vec{r}_M\|^3} (\vec{r}_m - \vec{r}_M)$$

Gravitationskraft von N Punktmassen M_i auf Masse m am Orte \vec{r}

$$\vec{F} = -Gm \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Betrachte statt Punktmassen Massendichte $\rho(\vec{r}')$

$$\vec{F} = -Gm \int_V d\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

Das Gravitationsfeld \vec{g} ist definiert als Gravitationskraft geteilt durch die Masse, auf die sie wirkt :

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \frac{M}{r^3} \vec{r}, \quad M \text{ im Ursprung}$$

Bei Massenverteilung

$$\vec{g} = -G \int_V d\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (15)$$

6.7.1 Gravitationspotential

Da Gravitationskraft konservativ, existiert für Punktmasse (am Ursprung) Gravitationspotential Φ mit

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi, \quad \Phi(\vec{r}) = -G \frac{M}{r} \quad (16)$$

Probe als Übung ?

- Da $\vec{\nabla}$ linear, $\vec{\nabla}(\Phi_1 + \Phi_2) = \vec{\nabla}\Phi_1 + \vec{\nabla}\Phi_2$, ist Potential einer Massenverteilung Integral über Potential der Massendichte

$$\Phi(\vec{r}) = -G \int_V d\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

- Generell: Rechnen mit Potentialen $\in \mathbb{R}$ einfacher als mit Kräften $\in \mathbb{R}^3$, siehe Lagrange- und Hamilton-Formalismus im 2. Semester

10. Woche

Physikalische Anwendung: Gravitationspotential homogener Kugel mit Radius R

- Massendichte:

$$\rho(\vec{r}') = \begin{cases} \rho & \text{für } \|\vec{r}'\| \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wähle Kugelkoordinaten, o.B.d.A.: z' -Richtung parallel zu \vec{r}

- Potential

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= -G \int_V d\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = -G\rho \int_0^R dr' r'^2 \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=2\pi} \\ &= -2\pi G\rho \int_0^R dr' r'^2 \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} \end{aligned}$$

mit Kosinussatz

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta, \quad \theta \text{ Winkel zwischen } \vec{r} \text{ und } \vec{r}', \quad \text{mit } r = \|\vec{r}\|$$

- Variablensubstitution

$$\theta \rightarrow y = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{rr' \sin \theta}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} \implies d\theta \frac{\sin \theta}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} = \frac{dy}{rr'}$$

Die Grenzen $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ entsprechen $\cos \theta = \pm 1$, damit

$$y = \sqrt{r^2 + r'^2 \mp 2rr'} = |r \mp r'|$$

Damit Potential außerhalb der Kugel, $\|\vec{r}'\| \geq R \geq r'$

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{2\pi G\rho}{r} \int_0^R dr' r' \underbrace{\int_{r-r'}^{r+r'} dy}_{=2r'} = -\frac{4\pi G\rho}{r} \int_0^R dr' r'^2 = -\frac{4\pi G\rho R^3}{3} \frac{1}{r}$$

- Mit Kugelvolumen $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ und Gesamtmasse $M = V\rho$ folgt

$$\Phi(\vec{r}) = -G \frac{M}{r}$$

Vergleich mit Gl. (16) ergibt

Das Gravitationspotential einer homogenen Kugel ist außerhalb der Kugel identisch mit dem einer im Zentrum der Kugel lokalisierten Punktmasse!

- Konsequenz: Planeten können im wesentlichen als Punktmassen behandelt werden.
- Übung: Gravitationsfeld innerhalb und außerhalb homogener Kugel in beliebigen Dimensionen mit Gauß'schem Satz viel einfacher zu berechnen

6.7.2 Poisson-Gleichung

Gravitationsfeld kann statt Volumenintegral Gl. (15) auch in differentieller Form geschrieben werden

- Es gilt, Beweis als Übung

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \quad \text{für } r > 0$$

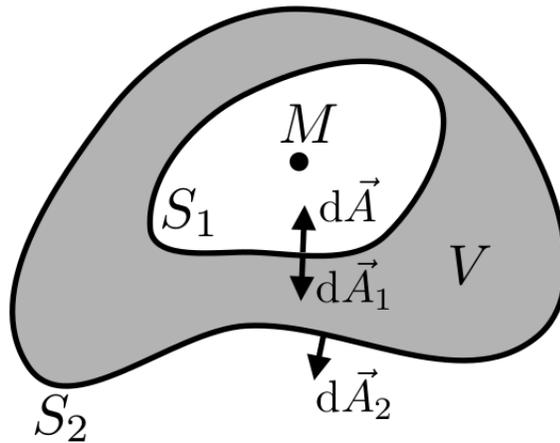
Angewandt auf Gravitationspotential einer Punktmasse:

$$\Delta\Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Phi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = 0, \quad \text{also } \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = 0 \text{ für } r > 0$$

- Gauß'scher Satz:
 - Der Fluss von \vec{g} durch jede Oberfläche, deren eingeschlossenes Volumen die Punktmasse M nicht enthält, verschwindet.
 - Fluss von \vec{g} durch jede Oberfläche, deren eingeschlossenes Volumen die Punktmasse enthält, ist gleich.

Beweis:

- Betrachte zwei Oberflächen, die die Punktmasse umschließen, Volumen zwischen Oberflächen sei V



- In V gilt $\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = 0$
Gauß'scher Satz:

$$\oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{A} = \int_V d\vec{r} (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) = 0$$

Folgt:

$$\oint_{\partial V} \vec{g} \cdot d\vec{A} = \oint_{S_2} \vec{g} \cdot d\vec{A}_2 + \oint_{S_1} \vec{g} \cdot d\vec{A}_1 = 0 \quad (17)$$

Beachte: $d\vec{A}_1$, $d\vec{A}_2$ zeigen nach außen.

- Berechnung des Flusses

- Betrachte Kugeloberfläche mit Radius R , \vec{g} und $d\vec{A}$ sind parallel

$$\vec{g} \cdot d\vec{A} = -\frac{GM}{R^2} dA$$

Kugeloberfläche:

$$\oint_S dA = R^2 \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin \theta}_{=2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=2\pi} = 4\pi R^2$$

Ergibt zusammen

$$\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{A} = -\frac{GM}{R^2} \oint_S dA = -4\pi GM$$

Mit Gl. (17) ist das Ergebnis unabhängig von Wahl der Oberfläche

- Auf Grund der Linearität gilt für mehrere Punktmassen M_i in S

$$\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G(M_1 + M_2 + \dots + M_n)$$

Für kontinuierliche Massenverteilung $\rho(\vec{r})$ gilt

$$\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G \int_V \rho(\vec{r}) d\vec{r}$$

- Erinnere Gauß'scher Satz:

$$\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{A} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) d\vec{r}$$

Da linke Seiten identisch und das für jedes Volumen V , folgt, dass auch die Integranden identisch sein müssen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho \tag{18}$$

Die Massendichte ρ ist die "Quelle" (=Divergenz) des Gravitationsfelds

- Für das Gravitationspotential Φ gilt

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho$$

die Poisson-Gleichung.

Übung: Nutze Gl. (18), um in beliebigen Dimensionen das Gravitationsfeld im Inneren und im Äußeren einer Kugel zu berechnen.

6.8 Die Kontinuitätsgleichung

Integralsätze geben Zusammenhang zwischen lokalen Aussagen, die an jedem Raumpunkt gelten, und globalen Aussagen, die für beliebige Flächen/Volumina gelten.

- Beispiel: Elektrische Ladung

- Sei $\rho(\vec{x}, t)$ die elektrische Ladungsdichte. Dann ist

$$Q_V(t) = \int_V \rho(\vec{x}, t) d^3x$$

die Gesamtladung in Volumen V zur Zeit t

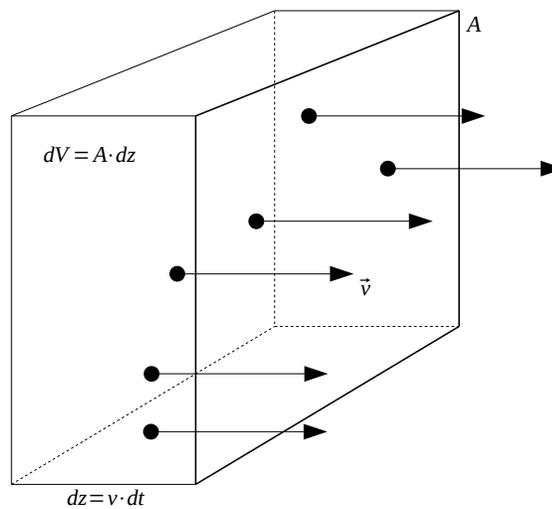
- Betrachte Ladungsänderung in V

$$\frac{d}{dt}Q_V(t) = \int_V \frac{d}{dt}\rho(\vec{x}, t)d^3x$$

Physik: Gesamtladung in einem abgeschlossenen Gebiet ist Erhaltungsgröße.

- Ergo: Ladungsänderung in V geht nur über Ladungsfluss durch Oberfläche von V
- Definiere Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$ zu Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$, die sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{x})$ bewegt

$$\vec{j}(\vec{x}) := \rho(\vec{x})\vec{v}(\vec{x})$$



Ladungsänderung :

$$\frac{d}{dt}Q_V(t) = - \int_{\partial V} \vec{j}(\vec{x}) \cdot d\vec{A} \quad \text{eine globale Bilanzgleichung} \quad (19)$$

Vorzeichen: $d\vec{A}$ "gucke nach draußen": Fluss macht Abnahme von Q_V

- Damit

$$\int_V \dot{\rho}(\vec{x}, t) d^3x = - \int_{\partial V} \vec{j}(\vec{x}) \cdot d\vec{A}$$

Mit Gauß'schem Satz:

$$\int_V \dot{\rho}(\vec{x}, t) d^3x = - \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x})) d^3x$$

Gilt für beliebige (globale) Volumina.

Daher gilt die lokale Aussage:

$$\dot{\rho}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x})$$

die Kontinuitätsgleichung

- Abgeleitet aus Bilanzgleichung, Gl. (19)

Bilanzgleichungen für Impuls und Energie führen in Hydrodynamik zu Bernoulli- und Navier-Stokes-Gleichung.

Lessons learned:

- Wegintegral, Flächenintegral, Volumenintegral
- Zusammenhang partielle und totale Ableitungen
- Gradient gibt Richtung des stärksten Anstiegs eines Skalarfeldes
- Divergenz misst Quellstärke eines Vektorfeldes
- Rotation misst Wirbelstärke eines Vektorfeldes
- Integralsätze bilden Beziehung zwischen Integralen über Differentiale von Vektorfeldern in \mathbb{R}^n und Integralen der Vektorfelder im \mathbb{R}^{n-1}
- Rotationsfreie Kraftfelder sind konservativ
- Die Massendichte ist die Quelle des Gravitationsfeldes.

7 Differentialgleichungen

Motivation:

Alle wichtigen Gleichungen der Physik sind Differentialgleichungen.
Diese machen die Physik prädiktiv und quantitativ.

Beispiele (ohne Vektorpfeile :-)

- Radioaktiver Zerfall

$$\dot{x} = -\alpha x$$

- Harmonischer Oszillator

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

- Teilchen im Gravitationsfeld

$$m_1 \ddot{r} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

- Elektromagnetische Wellen (partielle Differentialgleichung)

$$1\text{D: } \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x, t), \quad 3\text{D: } \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}} = \Delta \vec{E}$$

- Schrödinger Gleichung

$$1\text{D: } i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \right) \psi(x, t)$$

$$3\text{D: } i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x, t) \right) \psi(x, t)$$

Differentialgleichungen beschreiben die Änderung eines Zustands in Abhängigkeit des Zustands, im einfachsten Falle:

11. Woche

- vektorielle DGL. 1. Ordnung (Dynamisches System)

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t)), \quad \vec{x}(t=0) = \vec{x}_0 \quad (20)$$

oder

- univariate DGL. n ter Ordnung (gewöhnliche Differentialgleichung)

$$x^{(n)} = g(x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, \dots, x) \quad (21)$$

mit Anfangswerten

$$(x^{(n-1)}(t=0), x^{(n-2)}(t=0), \dots, x(t=0)) = (x_0^{(n-1)}, x_0^{(n-2)}, \dots, x_0)$$

Die Darstellungen in Gl. (20) und Gl. (21) sind äquivalent.

- Von Gl. (21) nach Gl. (20) durch Einführung von n Komponenten

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_{i+1} &= \dot{x}_i \quad \text{für } i = 1, n-1 \\ \dot{x}_n &= g(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1) \end{aligned}$$

Beispiel: Gedämpfter harmonischer Oszillator

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \omega_0^2 x$$

Definiere

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}_1$$

Ergibt

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\gamma x_2 - \omega_0^2 x_1 \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix}$$

- Andersrum, von Gl. (20) nach Gl. (21) mitunter nichttrivial.

7.1 Analytische Lösungen

Annahme: Lösung ist eindeutig. Notwendige Voraussetzung in Mathe-Vorlesung,
Stichwort: Lipschitz-stetig

7.1.1 Ganz einfach

$$\dot{x} = f(t)$$

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = F(t) + c, \quad F(t) \text{ Stammfunktion von } f(t), \text{ eine Kurvenschar}$$

Spezielle Lösung :

$$c \text{ Anfangsbedingung : } c = x(t_0) - F(t_0)$$

7.1.2 Getrennte Variablen

$$\dot{x} = f(t)g(x)$$

Sei $F(t)$ Stammfunktion von $f(t)$ und $G(x)$ Stammfunktion von $\frac{1}{g(x)}$, und $g(x(t)) \neq 0$

$$\dot{x} = f(t)g(x) \Leftrightarrow \frac{\dot{x}}{g(x)} = f(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}G(x) = f(t) \Leftrightarrow G(x) = F(t) + c$$

Löse Gleichung nach x auf.

Beispiel:

$$\dot{x} = -tx^2, \quad F(t) = t^2/2, \quad G(x) = 1/x$$

$$\frac{1}{x} = \frac{t^2}{2} + c \Leftrightarrow x = \frac{2}{t^2 + 2c}$$

Diskussion der Lösung

- c aus Anfangsbedingung, sei $x_0 = x(0)$, $c = \frac{1}{x_0}$
- Dann

$$- x_0 = 0: x(t) = 0$$

- $x_0 < 0$: Lösung nur für $t < \frac{1}{\sqrt{2|x_0|}}$, da Lösung bei $t = \frac{1}{\sqrt{2|x_0|}}$ divergiert
- $x_0 > 0$: Alles gut

Laxe Formulierung, tue so als seien dx und dy "normale" Zahlen.

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x) \Leftrightarrow \frac{dx}{g(x)} = f(t)dt \Leftrightarrow \int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt$$

"Trennung der Variablen"

7.1.3 Linear

$$\dot{x} = f(t)x$$

Da die Gleichung linear ist, gilt das Superpositionsgesetz:

- Sind $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen, so ist $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung.
- Die Lösungen der Differentialgleichung bilden einen Vektorraum.

Laxe Lösung

$$\begin{aligned} \dot{x} = f(t)x &\Leftrightarrow \frac{dx}{x} = dt f(t) \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int dt f(t) \Leftrightarrow \ln x = F(t) + c \\ &\Leftrightarrow x = e^{F(t)+c} \Leftrightarrow x(t) = \lambda e^{F(t)} \end{aligned} \quad (22)$$

Check:

$$\dot{x} = \lambda e^{F(t)} \dot{F}(t) = \lambda e^{F(t)} f(t) = f(t)x$$

7.1.4 Inhomogen linear

$$\dot{x} = f(t)x + g(t) \quad (23)$$

- Motiviert durch Gl. (22) wähle Ansatz:

$$x(t) = \lambda(t)e^{F(t)} \quad \underline{\text{Variation der Konstanten}}$$

- Eingesetzt und Vergleich mit Gl. (23):

$$\dot{x} = \dot{\lambda}(t)e^{F(t)} + \lambda(t)e^{F(t)}f(t) = f(t)\underbrace{\lambda(t)e^{F(t)}}_{=x} + g(t)$$

ergibt sich DGL. für $\lambda(t)$:

$$\dot{\lambda}(t)e^{F(t)} = g(t) \Leftrightarrow \dot{\lambda}(t) = g(t)e^{-F(t)}$$

- Mit $H(t)$ Stammfunktion von $g(t)e^{-F(t)}$ folgt $\lambda = H(t) + c$ und Gesamtlösung

$$x(t) = ce^{F(t)} + H(t)e^{F(t)}$$

7.1.5 Linear mit konstanten Koeffizienten

Einfachster Fall, Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha x, & x(0) &= x_0 \\ \frac{dx}{dt} &= -\alpha x \\ \frac{dx}{x} &= -\alpha dt \\ \int_{x_0}^x \frac{1}{x'} dx' &= -\alpha \int_0^t dt' \\ \log(y)|_{x_0}^x &= -\alpha t \\ \log(x) - \log(x_0) &= \log\left(\frac{x}{x_0}\right) = -\alpha t \\ x(t) &= x_0 e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ergeben sich z.B. nach Taylorentwicklungen bei Schwingungen mit kleiner Amplitude, siehe Kapitel 8.

(i) Gleichungssystem erster Ordnung

Sei A ($m \times m$) Matrix

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \quad \text{Anfangsbedingung : } \vec{x}(0), \text{ o.B.d.A } t_0 = 0$$

- Formale Lösung:

$$\vec{x}(t) = e^{At} \vec{x}(0) \quad \text{mit Matrix } (At)_{ij} = A_{ij}t \quad (24)$$

- Exponentialfunktion einer Matrix ist definiert durch

$$e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} \quad \text{mit } B^0 = 1$$

Ableitung:

$$\left(\frac{d}{dt} B \right)_{ij} = \frac{d}{dt} B_{ij}$$

- Es gilt, Beweis als Übung

$$(At)^n = A^n t^n$$

- Übung: Beweise Gl. (24)

Konkrete Lösung

- Man nehme an, $\vec{x}(0)$ sei Eigenvektor von A zum Eigenwert λ :

$$A\vec{x}(0) = \lambda\vec{x}(0)$$

dann ist $\vec{x}(0)$ auch Eigenvektor von A^2 , und zwar zum Eigenwert λ^2 , erinnere Kap. 4.7

$$A^2\vec{x}(0) = A(A\vec{x}(0)) = \lambda A\vec{x}(0) = \lambda^2\vec{x}(0)$$

und allgemein:

$$A^n\vec{x}(0) = \lambda^n\vec{x}(0)$$

Unter Ausnutzung der Potenzreihen-Darstellung von e^{At} folgt explizite Lösung:

$$e^{At}\vec{x}(0) = e^{\lambda t}\vec{x}(0)$$

- Ist $\vec{x}(0)$ kein Eigenvektor von A , erhält man explizite Lösung in dem man $\vec{x}(0)$ als Linearkombination von Eigenvektoren \vec{x}_i darstellt

$$\vec{x}(0) = \sum_{i=1}^m c_i \vec{x}_i$$

mit

$$A\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$$

Lösung:

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^m c_i e^{\lambda_i t} \vec{x}_i$$

Beweis:

Mit

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda_i t} = e^{\lambda_i t} \lambda_i$$

folgt

$$\dot{\vec{x}}(t) = \sum_{i=1}^m c_i e^{\lambda_i t} \underbrace{\lambda_i \vec{x}_i}_{=A\vec{x}_i} = A\vec{x}(t)$$

- Für Fall, dass Eigenvektoren nicht existieren, A nicht diagonalisierbar ist, siehe Übung.

(ii) Ein-dimensionale Gleichung n -ter Ordnung

$$x^{(n)} = a_1 x + a_2 \dot{x} + \dots + a_n x^{(n-1)} \quad (25)$$

- Wähle Ansatz:

$$x(t) = e^{\lambda t} x(0)$$

Mit

$$\frac{d^m}{dt^m} e^{\lambda t} = \lambda^m e^{\lambda t}$$

in Gl. (25) eingesetzt:

$$\lambda^n e^{\lambda t} x(0) = a_1 e^{\lambda t} x(0) + a_2 \lambda e^{\lambda t} x(0) + \dots + a_n \lambda^{n-1} e^{\lambda t} x(0) \quad (26)$$

- Gl. (26) für beliebiges $x(0) \neq 0$ genau dann erfüllt, wenn

$$\lambda^n - a_n \lambda^{n-1} - \dots - a_2 \lambda - a_1 = 0$$

- Gesucht sind also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, siehe Kap. 4.7

$$P(\lambda) = \lambda^n - a_n \lambda^{n-1} - \dots - a_2 \lambda - a_1 \quad (27)$$

Erinnere Fundamentalsatz der Algebra, siehe Kap. 2

- Nullstellen von $P(\lambda)$ sind natürlich grade die Eigenwerte von A aus (i)
- Beachte: Auch wenn die Koeffizienten a_1, \dots, a_n reell sind, können die Nullstellen komplex sein
- In diesem Fall gilt:

Ist

$$\lambda = \gamma + i\omega$$

eine Nullstelle, so auch

$$\lambda^* = \gamma - i\omega$$

mit den komplexen Lösungen

$$x_1(t) = e^{\lambda t} \quad \text{und} \quad x_2(t) = e^{\lambda^* t}$$

Auf Grund der Linearität ist dann auch die Summe eine Lösung

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda^* t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Mit $c_2 = c_1^*$ erhalten wir reelle Lösung.

Mit $c_1 = a/2 - ib/2$ und $c_2 = a/2 + ib/2$ erhalten wir, Beweis als Übung

$$x(t) = e^{\gamma t} (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) = d e^{\gamma t} \sin(\omega t + \phi), \quad d, \phi \in \mathbb{R}$$

- Merke:
 - Realteil γ von λ sorgt für exponentielles Verhalten

– Imaginärteil ω von λ sorgt für oszillatorisches Verhalten

Die allgemeine Lösung

- Mit dem Fundamentalsatz der Algebra kann man das charakteristische Polynom Gl. (27) schreiben als

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i), \quad \lambda_i \text{ die Nullstellen}$$

Sind alle n λ_i verschieden, liefert Exponentialansatz n verschiedene Lösungen.

- Die allgemeine Lösung erhält man als Linearkombination:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t}$$

Die c_i werden durch Anfangsbedingungen $x(0), \dot{x}(0), \dots, x^{(n-1)}(0)$ festgelegt.

- Sind die λ_i und damit die Nullstellen nicht verschieden, reicht der Exponentialansatz nicht aus. Entspricht Nicht-diagonalisierbarkeit der Matrix A in (i).

Das charakteristische Polynom hat dann die Form:

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i)^{s_i}$$

mit $m < n$ verschiedenen Nullstellen mit jeweiligen Vielfachheiten s_i , für die gilt

$$\sum_{i=1}^m s_i = n$$

Für jedes λ_i gibt es dann s_i verschiedene Lösungen, Beweis als Übung, nutze z.B. Variation der Koeffizienten

$$x(t) = \begin{cases} e^{\lambda_i t} \\ te^{\lambda_i t} \\ \vdots \\ t^{s_i-1} e^{\lambda_i t} \end{cases}$$

Damit die allgemeine Lösung:

$$x(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{s_i} c_{ij} t^{j-1} e^{\lambda_i t}$$

c_{ij} wieder durch Anfangsbedingungen festgelegt.

- Physikalische Anwendung in Kap. 8.1.2 Aperiodischer Grenzfall

7.1.6 Inhomogene lineare DGLs mit konstanten Koeffizienten

$$x^{(n)} = a_1 x + a_2 \dot{x} + \dots + a_n x^{(n-1)} + f(t) \quad (28)$$

Beachte:

- Wegen Inhomogenität ist die Differentialgleichung nicht-linear.
- Sind $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen, so ist $a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ im allgemeinen keine Lösung

Lösungsstrategie

- Betrachte zunächst homogene Differentialgleichung, $f(t) = 0$
Lösung von oben

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t), \quad x_i(t) = e^{\lambda_i t}$$

- Angenommen, eine spezielle Lösung $x_0(t)$ der inhomogenen Gleichung ist bekannt.

- **Erinnere:**

Satz:

Die allgemeine Lösung von Gl. (28) lautet

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{i=1}^n c_i x_i(t)$$

- **Beweis:**

- Definiere Differentialoperator $L(x)$

$$L(x) = x^{(n)} - a_n x^{(n-1)} - \dots - a_2 \dot{x} - a_1 x$$

$L(x)$ ist offensichtlich ein linearer Operator

- Für spezielle Lösung $x_0(t)$ gilt

$$L(x_0) = f(t)$$

Für $x_i(t)$ gilt

$$L(x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Damit für die allgemeine Lösung $x(t)$

$$L(x) = \underbrace{L(x_0)}_{=f(t)} + \sum_{i=1}^n c_i \underbrace{L(x_i)}_{=0} = f(t)$$

- **Beweis, dass Superpositionsprinzip nicht mehr gilt**

- Würde Superpositionsprinzip gelten, so müsste mit $x(t)$ auch $2x(t)$ Lösung sein.
- Aber auf Grund der Linearität von $L(\cdot)$

$$L(2x(t)) = \underbrace{L(2x_0)}_{=2f(t)} + \sum_{i=1}^n c_i \underbrace{L(2x_i)}_{=0} = 2f(t) \neq f(t)$$

Ergo: $2x(t)$ keine Lösung, Superpositionsprinzip nicht erfüllt.

12. Woche

7.2 Numerische Lösungen

Bemerkung zum Umgang mit Numerik in der Physik

Aufgabe: Gegeben

- Dynamisches System:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$$

- Startwerte: $\vec{x}(t_0)$
- Finde Trajektorie $\vec{x}(t_i)$, $t_i > t_0$, die bis auf einen kontrollierbaren Fehler mit wahrer Trajektorie übereinstimmt.

Nomenklatur:

$$\frac{d}{dt} = ; \quad \frac{d}{dx} = ', \quad \text{Beachte: } \ddot{x} = \dot{f}(x) = f'(x)\dot{x} = f'(x)f(x) \quad (*)$$

Grundsätzliche Idee :

- Taylor-Entwicklung mit Integrations-Schrittweite h :

$$x_{t+h} = x_t + \dot{x}_t h + \frac{1}{2} \ddot{x}_t h^2 + \frac{1}{6} x_t^{(3)} h^3 + O(h^4) \quad (\dagger)$$

\dot{x}_t gegeben durch $f(x_t)$, aber $x_t^{(n)}$ möchte man nicht ausrechnen.

- Abbruch nach erster Ordnung: Euler-Verfahren:

$$x_{t+h} = x_t + f(x_t)h + O(h^2)$$

”Erster Ordnungs Verfahren”

- Idee: Höhere Ordnung durch geschickte Funktionsauswertungen.

– Betrachte:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_t)h \\
x_{t+h} &= x_t + f\left(x_t + \frac{1}{2}k_1\right)h \\
x_{t+h} &= x_t + f\left(x_t + \frac{1}{2}f(x_t)h\right)h \\
x_{t+h} &= x_t + \left[f(x_t) + f'(x_t)\frac{1}{2}f(x_t)h\right]h \\
x_{t+h} &= x_t + f(x_t)h + \frac{1}{2}f'(x_t)f(x_t)h^2
\end{aligned}$$

- Mit (*) cancelled sich der 2. Ordnungs-Term in (†) und man erhält ein Verfahren 2. Ordnung (Midpoint Method).
- Dieses läßt sich weiterspinnen
Speziell:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_t)h \\
k_2 &= f(x_t + k_1/2)h \\
k_3 &= f(x_t + k_2/2)h \\
k_4 &= f(x_t + k_3)h \\
x_{t+h} &= x_t + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5)
\end{aligned}$$

heißt 4. Ordnung Runge-Kutta (1895)

- Im Allgemeinen:
Ein 4. Ordnung Runge-Kutta Schritt mit h ist genauer als 2 Midpoint-Schritte mit $h/2$ ist genauer als 4 Euler-Schritte mit $h/4$.
- Wichtig: Der Fehler lässt sich intern abschätzen und damit kontrollieren
Fehler zu groß: Verringere Schrittweite h

Empfohlene weiterführende Vorlesung(en) in der Mathematik: Differentialgleichungen

Lessons learned:

- Differentialgleichungen werden uns Zeit des Studiums nicht verlassen
- Lineare Differentialgleichungen sind analytisch lösbar
- Lösungen linearer Differentialgleichungen bilden einen Vektorraum
- Differentialgleichungen, die sich nicht analytisch lösen lassen, lassen sich unter geschickter Ausnutzung der Taylor-Entwicklung numerisch lösen
- Differentialgleichungen integrieren: Dritthäufigste Tätigkeit eines Physikers

8 Lineare Schwingungen

Linearisierung :

- Allgemeine Kräfte um eine Gleichgewichtslage lassen sich Taylor-entwickeln

$$F(x) = -ax - bx^2 - cx^3 - \dots$$

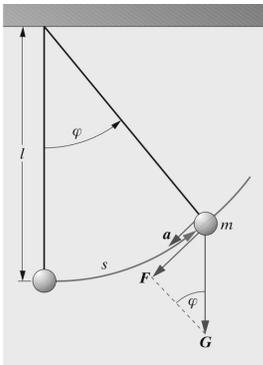
- Entspricht für Potential

$$U(x) = \text{const} + \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{4}cx^4 + \dots$$

- Oft: Abbruch nach linearem/quadratischem Term sinnvoll.
- Ergibt lineare, oder besser linearisierte Bewegungsgleichungen
- Wichtig: Bei linearen Systemen gilt Superpositionsprinzip:
Mit Lösungen $x_1(t)$, $x_2(t)$ ist auch $ax_1(t) + bx_2(t)$ Lösung

8.1 Eindimensionale Systeme

8.1.1 Harmonischer Oszillator



- $ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi = -mgl \left(\varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 + \dots \right)$
- Linearisierung:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\varphi, \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi$$

Ansatz:

$$\varphi(t) = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t, \quad \text{folgt: } \omega^2 = \frac{g}{l} \quad \omega = \pm \frac{g}{l}$$

- Allgemeine Lösung:

$$\varphi(t) = \operatorname{Re}(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t})$$

DGl 2. Ordnung: Zwei Anfangsbedingungen: $\varphi(0) = \alpha$, $\dot{\varphi}(0) = \beta$

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \operatorname{Re}(A_1 + A_2) = \alpha \\ \dot{\varphi}(0) &= \operatorname{Re}(i\omega A_1 - i\omega A_2) = \beta\end{aligned}$$

Mögliche Lösung: $A_1 = \alpha$, $A_2 = i\beta/\omega$

$$\varphi(t) = \alpha \cos \omega t + (\beta/\omega) \sin \omega t = C \cos(\omega t - \delta), \quad C = \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^2}{\omega^2}}, \quad \tan \delta = \frac{\beta}{\alpha\omega}$$

8.1.2 Homogenes gedämpftes lineares System

- Betrachte:

$$\ddot{x}(t) + 2\rho\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad \rho, \omega_0^2 > 0 \quad (29)$$

Harmonischer Oszillator mit Reibungskraft $-2\rho\dot{x}$

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right) \\ &= m \dot{x} (\ddot{x} + \omega_0^2 x) = -2m\rho\dot{x}^2\end{aligned}$$

Macht Sinn.

- Zur Lösung Komplexifizierung

- Betrachte Gl. (29) für komplexwertige $x(t)$
- Es gilt Superpositionsprinzip:
Mit Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ ist auch $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ Lösung
- Da $\rho, \omega_0^2 \in \mathbb{R}$ ist auch komplex konjugierte $x(t)^*$ Lösung
- "Re-Reallisierung":
 $u(t) = \operatorname{Re}(x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) + x(t)^*)$ ist reelle Lösung.

- Exponentialansatz:

$$x(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

– Bestimme λ so, dass Gl. (29) erfüllt wird.

Eingesetzt, ergibt:

$$\lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega_0^2 = 0$$

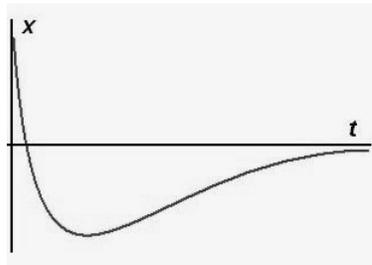
– Lösung:

$$\lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}$$

– Drei Fälle möglich

(i) $\rho^2 > \omega_0^2$: Starke Dämpfung, zwei reelle Nullstellen

$$x(t) = e^{-\rho t}(ae^{\hat{\omega}t} + be^{-\hat{\omega}t}), \quad \hat{\omega} = \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}$$

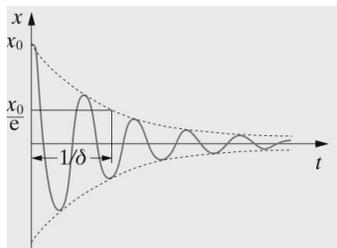


(ii) $\rho^2 < \omega_0^2$: Schwache Dämpfung, zwei komplex konjugierte Nullstellen
Allgemeine komplexe Lösung:

$$x(t) = e^{-\rho t}(\alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$$

Reell:

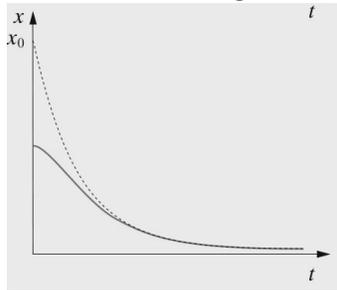
$$x(t) = e^{-\rho t}(a' \cos \omega t + b' \sin \omega t)$$



- * $\rho^2 = \omega_0^2$: Aperiodischer Grenzfall
Exponentialansatz liefert nur eine Lösung.
Allgemeine Lösung:

$$x(t) = e^{-\rho t}(\alpha + \beta t)$$

Beweis als Übung



Für alle drei Fälle gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Bedeutung komplexer Zahlen

- Exponentialansatz zeigt Bedeutung komplexer Zahlen
- Komplexe Lösungen von Polynomen n -ten Grades, Fundamentalsatz der Algebra, sind kein Selbstzweck
- Physikalische Bedeutung:
 - Komplexe Nullstellen der charakteristischen Gleichung beschreiben oszillatorische Lösungen
 - Reelle Nullstellen nicht-oszillatorische exponentiell abklingende Lösungen

8.1.3 Harmonisch getriebenes gedämpftes lineares System

- Betrachte harmonisch getriebenes lineares System:

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \quad (30)$$

eine inhomogene Differentialgleichung

- Formal:

$$Lx(t) = f(t) \quad (31)$$

mit

$$L = \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\rho \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) \quad \text{linearer Differentialoperator}$$

- Erinnerung: Inhomogenes Problem ist vollständig gelöst, wenn allgemeine Lösung des homogenen Problems $x(t)$ und eine einzige Lösung $x_0(t)$ des inhomogenen Problems bekannt ist.

Veranschaulichung durch Diskussion der Freiheitsgrade

Die Lösung

- Komplexifizierung:

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\omega t}$$

- Exponentialansatz:

$$x(t) = A e^{i\omega t}, \quad A : \text{komplexe Amplitude}$$

- Eingesetzt und $e^{i\omega t}$ gekürzt:

$$A(-\omega^2 + 2i\rho\omega + \omega_0^2) = f_0, \quad A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\rho\omega}$$

Ergibt eine Lösung des inhomogenen Systems

$$x_0(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\rho\omega} e^{i\omega t}$$

- Allgemeine Lösung durch Addition der allgemeinen Lösung des homogenen Systems, Gl. (29).

Da diese aber stets mit $t \rightarrow \infty$ abklingen, strebt jede Lösung gegen die spezielle $x_0(t)$

- System "vergißt" Anfangsbedingungen im Einschwingvorgang

- Schreibe

$$A = |A|e^{i\delta}$$

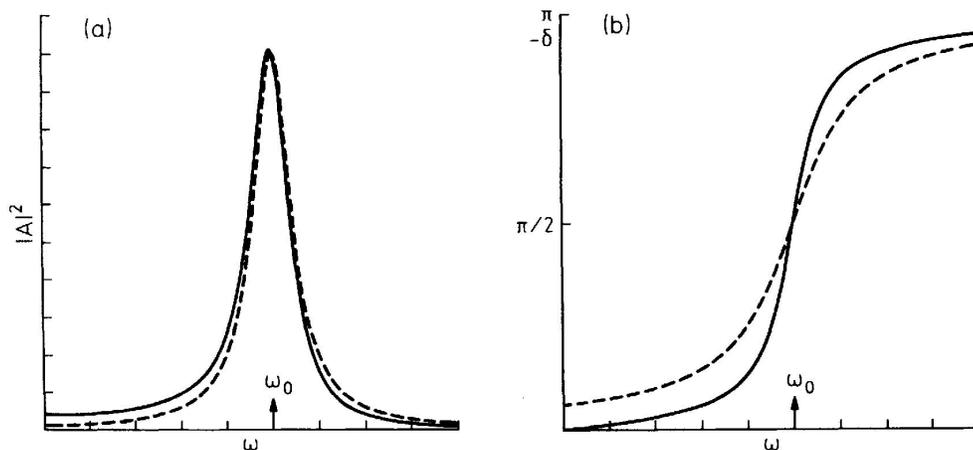
ergibt reelle Lösung von Gl. (30)

$x(t) = \text{Re}(x_0(t)) = |A| \cos(\omega t + \delta)$

mit

$$|A|^2 = \frac{f_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\rho^2\omega^2}, \quad \tan \delta = \frac{2\rho\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Spektren:



Amplitudenquadrat $|A|^2$ und Phase $-\delta$ in Abhängigkeit von ω . Die durchgezogene Kurve gilt für das exakte Resultat (6.5.4), die gestrichelte Kurve für die Näherung für schwache Dämpfung (6.5.5)

- Interpretation

– $|A|^2$ hat Maximum bei $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\rho^2$

Resonanz

Maximum um so schärfer je kleiner Dämpfung ρ

$$- \delta \in [0, -\pi]$$

Erschwungene Schwingung hinkt dem äußeren Antrieb nach.

Für $\omega \rightarrow 0$ folgt $\delta \rightarrow 0$, für $\omega \rightarrow \infty$ folgt $\delta \rightarrow -\pi$

Phasensprung schärfer, wenn Dämpfung kleiner

13. Woche

8.2 Der allgemeine ungedämpfte harmonische Fall

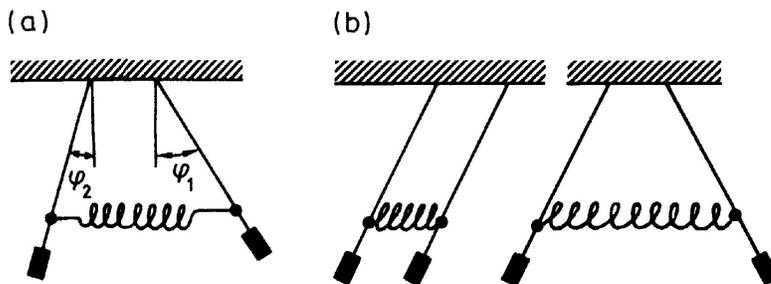
- Erinnere ein-dimensionale Schwingung:

$$m\ddot{x} + Dx = 0, \quad E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Dx^2$$

- Bei Kopplungen: Bewegungsgleichung

$$\sum_j (M_{ij}\ddot{x}_j + K_{ij}x_j) = 0$$

Beispiel:



Gekoppelte Pendel (a) und ihre Fundamentalschwingungen (b)

- Sei $m_1 = m_2 = m$
- Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l}\varphi_1 + \frac{D}{m}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}\varphi_2 + \frac{D}{m}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

- Matrixformulierung:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{D}{m} & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & \frac{g}{l} + \frac{D}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = 0$$

Zurück zum Allgemeinen:

- Massenmatrix M mit $M_{ij} = M_{ji}$,

$$\sum_{ij} M_{ij} a_i a_j > 0, \quad \text{für } \sum_i a_i^2 \neq 0, \quad \text{man denke an Geschwindigkeiten}$$

da kinetische Energie > 0 , wenn nicht alle Geschwindigkeiten verschwinden
 M_{ij} ist positiv definit

- Kopplungsmatrix K mit $K_{ij} = K_{ji}$

$$\sum_{ij} K_{ij} a_i a_j > 0, \quad \text{für } \sum_i a_i^2 \neq 0, \quad \text{man denke an Auslenkungen}$$

gilt, wenn x^0 stabile Ruhelage, i.e. Minimum von Potential ist.

An (runder) Badewanne erläutern.

- Ab jetzt alle Indices unterdrückt, i.e. $M, K \in R^{n \times n}$, $x, y \in R^n$

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \tag{32}$$

- Symmetrie, selbstadjungiert:

$$y \cdot (Mx) = (My) \cdot x, \quad y \cdot (Kx) = (Ky) \cdot x \tag{33}$$

Lösung:

- Komplexifizierung

wie gehabt

- Exponentialansatz

Ansatz:

$$x(t) = ve^{i\omega t}, \quad x, v \in C^n$$

Bestimme v und ω , so dass $x(t)$ Lösung von Gl. (32)

- Eingesetzt, ein Eigenwert-Problem:

$$-M\omega^2 v e^{i\omega t} + K v e^{i\omega t} = 0, \quad (K - \omega^2 M)v = 0, \quad M^{-1}K v = \omega^2 v \quad (34)$$

Nichttriviale Lösung $v \neq 0$, nur wenn $(K - \omega^2 M)$ nicht injektiv, also

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad \text{Bedingungsgleichung für } \omega^2$$

- Säkulargleichung: Taucht auf für Langzeit- („säkular“) Verhalten der Planeten bei Störungen durch die anderen auf
- n -ter Ordnung in ω^2
- Mögliche Werte von ω^2 müssen Nullstellen von $\det(K - \omega^2 M) = 0$ sein

$$(K - \omega_\alpha^2 M)v_\alpha = 0 \quad \text{Bedingungsgleichung für } v_\alpha$$

Seien ω_α^2 , $\alpha = 1, \dots, n$ die Nullstellen des Charakteristischen Polynoms und v^α die entsprechenden Eigenvektoren mit

$$(K - \omega_\alpha^2 M)v_\alpha = 0$$

Es gilt

- (i) ω_α^2 ist reell
- (ii) Wenn $x^* K x \geq 0 \forall x$, dann $\omega_\alpha^2 \geq 0$
 Wenn $x^* K x > 0 \forall x \neq 0$, also x_0 stabiles Minimum, gilt $\omega_\alpha^2 > 0$
 ω_α ist also reell und damit $x(t) = v_\alpha e^{i\omega_\alpha t}$ beschränkt.
- (iii) Eigenvektoren v_α können reell gewählt werden.
- (iv) Die reellen Eigenvektoren v_α , $\alpha = 1, \dots, n$ sind linear unabhängig und bilden Basis des \mathbb{R}^n

Beweis:

(i) Aus

$$Kv_\alpha = \omega_\alpha^2 Mv_\alpha \quad \text{folgt} \quad v_\alpha^* \cdot Kv_\alpha = \omega_\alpha^2 v_\alpha^* \cdot Mv_\alpha$$

Wegen Symmetrie und Reellwertigkeit von M und K sind beide Seiten reell.

$$v^* \cdot Kv = Kv \cdot v^* = v \cdot Kv^* = (v^* \cdot Kv)^*$$

Da M positiv definit, kann man auflösen:

$$\omega_\alpha^2 = \frac{v_\alpha^* K v_\alpha}{v_\alpha^* M v_\alpha} \quad \omega_\alpha^2 \text{ reell}$$

(ii) Gilt $x^* K x > 0$, so folgt $\omega_\alpha^2 > 0$ und beschränkte Lösung

$$x(t) = v_\alpha e^{i\omega_\alpha t}$$

(iii) Da M, K, ω_α^2 reell, folgt aus

$$(K - \omega_\alpha^2 M)v_\alpha = 0$$

$$[(K - \omega_\alpha^2 M)v_\alpha]^* = (K - \omega_\alpha^2 M)v_\alpha^* = 0$$

Also $Re(v_\alpha)$ und $Im(v_\alpha)$ Eigenvektoren, die nicht gleichzeitig verschwinden können

(iv) Für reelle Eigenvektoren v_α, v_β :

$$v_\alpha \cdot Kv_\beta = \omega_\beta^2 v_\alpha \cdot Mv_\beta$$

$$v_\alpha \cdot Kv_\beta = Kv_\alpha \cdot v_\beta = \omega_\alpha^2 Mv_\alpha \cdot v_\beta = \omega_\alpha^2 v_\alpha \cdot Mv_\beta$$

Damit:

$$(\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2)v_\alpha Mv_\beta = 0$$

und somit

$$v_\alpha Mv_\beta = 0, \quad \text{für } \omega_\alpha^2 \neq \omega_\beta^2$$

Annahme: Es gelte $\omega_\alpha^2 \neq \omega_\beta^2$. Beweis auch ohne wahr, aber aufwendiger

Wähle ξ_α , so dass

$$\sum_{\alpha=1}^n \xi_\alpha v_\alpha = 0$$

Es folgt

$$\begin{aligned} v_\beta \cdot M \left[\sum_{\alpha=1}^n \xi_\alpha v_\alpha \right] &= 0 = \sum_{\alpha=1}^n \xi_\alpha v_\beta \cdot M v_\alpha \\ &= \xi_\beta v_\beta \cdot M v_\beta \end{aligned}$$

Also $\xi_\beta = 0 \forall \beta$

Damit sind $v_\alpha \alpha = 1, \dots, n$ linear unabhängig.

Bilden Basis, da ihre Anzahl $=n$

Beweis Ende

- Normierung \vec{v}_α

$$v_\alpha M v_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (35)$$

- Die Lösungen

$$\vec{x}_\alpha(t) = \vec{v}_\alpha e^{i\omega_\alpha t}$$

heißen Eigenschwingungen, ω_α heißen Eigenfrequenzen des Systems

Harmonische Schwingungen mit konstanten Verhältnissen der einzelnen Auslenkungen

- Die allgemeine Lösung :

$$\vec{x}(t) = \sum_{\alpha=1}^n \vec{v}_\alpha (a_\alpha e^{i\omega_\alpha t} + b_\alpha e^{-i\omega_\alpha t})$$

a_α und b_α durch Anfangsbedingungen gegeben

- Normalkoordinaten

Führe neue Koordinaten $Q_\alpha(t)$ ein.

$$\vec{x}(t) = \sum_{\alpha=1}^n Q_{\alpha}(t) \vec{v}_{\alpha} \quad (36)$$

Damit gilt mit Gl. (35):

$$Q_{\alpha}(t) = v_{\alpha} \cdot Mx(t) \quad (37)$$

Aus Bewegungsgleichung

$$M\ddot{x} + Kx = 0$$

folgt für v_{α} , $\alpha = 1, \dots, n$ unter freudiger Ausnutzung von Gln. (33, 34, 36):

$$\begin{aligned} v_{\alpha} M \ddot{x} + v_{\alpha} K x &= 0 \\ \ddot{Q}_{\alpha} + K v_{\alpha} x &= 0 \\ \ddot{Q}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 M v_{\alpha} x &= 0 \\ \ddot{Q}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 v_{\alpha} M x &= 0 \\ \ddot{Q}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha} &= 0 \end{aligned}$$

$$\ddot{Q}_{\alpha}(t) + \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha}(t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, n$$

Bewegungsgleichungen entkoppeln

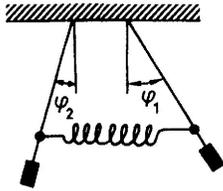
- Existiert α mit $\omega_{\alpha} = 0$, i.e. $v_{\alpha} K v_{\alpha} = 0$ so folgt

$$\ddot{Q}_{\alpha}(t) = 0, \quad Q_{\alpha}(t) = at + b$$

als lineare Bewegung für diese Normalkoordinate

8.3 Zwei Beispiele

8.3.1 Zwei gekoppelte Pendel für kleine Amplituden



- Sei $m_1 = m_2 = m$
- Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l}\varphi_1 + \frac{D}{m}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$
$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}\varphi_2 + \frac{D}{m}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

Matrixformulierung

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{D}{m} & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & \frac{g}{l} + \frac{D}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = 0$$

- Exponentialansatz

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

- Ergibt Eigenwertgleichung:

$$\begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{D}{m} - \omega^2 & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & \frac{g}{l} + \frac{D}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = 0$$

- Säkulargleichung

$$\det \begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{D}{m} - \omega^2 & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & \frac{g}{l} + \frac{D}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} = \omega^4 - 2\omega^2 \left(\frac{g}{l} + \frac{D}{m} \right) + \left(\frac{g}{l} + \frac{D}{m} \right)^2 - \left(\frac{D}{m} \right)^2$$
$$= \left(\omega^2 - \frac{g}{l} \right) \left(\omega^2 - \left(\frac{g}{l} + 2\frac{D}{m} \right) \right) = 0$$

mit Lösungen

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + 2\frac{D}{m}$$

- Eigenvektoren:

– zu ω_1^2 :

$$\begin{pmatrix} \frac{D}{m} & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & \frac{D}{m} \end{pmatrix} \vec{v} = 0, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

– zu ω_2^2 :

$$\begin{pmatrix} -\frac{D}{m} & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & \frac{D}{m} \end{pmatrix} \vec{v} = 0, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- 2 Eigenschwingungen:

–

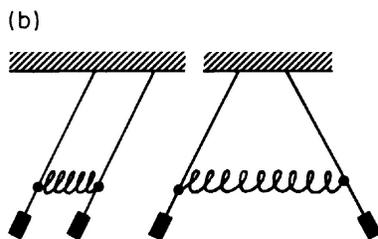
$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}$$

Pendel schwingen gleichsinnig: $\varphi_1 = \varphi_2$

–

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t}$$

Pendel schwingen gegensinnig: $\varphi_1 = -\varphi_2$



- Normalkoordinaten mit Gl. (37):

$$Q_1 = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$Q_2 = \varphi_1 - \varphi_2$$

Zusammenhang mit Eigenschwingungen offensichtlich da $M \propto \delta_{ij}$

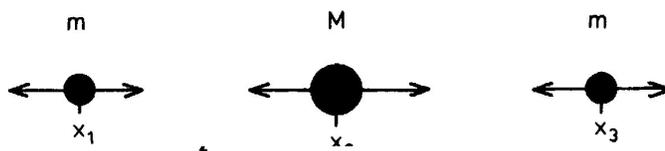
- Allgemeine Lösung im Reellen

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} a \cos(\omega_1 t + \varphi_0^1) + b \cos(\omega_2 t + \varphi_0^2) \\ a \cos(\omega_1 t + \varphi_0^1) - b \cos(\omega_2 t + \varphi_0^2) \end{pmatrix}$$

$(a, b, \varphi_0^1, \varphi_0^2)$ durch Anfangsbedingungen $(\varphi_1(0), \dot{\varphi}_1(0), \varphi_2(0), \dot{\varphi}_2(0))$ gegeben.

8.3.2 Lineares dreiatomiges Molekül

- Mittleres Atom an x_2 mit Masse M , äußere Atome x_1, x_3 mit Masse: m



Das lineare dreiatomige Molekül

- Bemerkung: Festkörperphysik
- Gleichgewichtsabstände: $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = b$
Annahme: Nur lineare nächste Nachbar-Wechselwirkung
- Damit für Auslenkungen aus Gleichgewichtslage

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} K & -K & 0 \\ -K & 2K & -K \\ 0 & -K & K \end{pmatrix}$$

Säkulargleichung

$$\det(K - \omega^2 M) = \begin{vmatrix} K - \omega^2 m & -K & 0 \\ -K & 2K - \omega^2 M & -K \\ 0 & -K & K - \omega^2 m \end{vmatrix} =$$

$$(K - m\omega^2)^2(2K - M\omega^2) - 2K^2(K - m\omega^2) = 0$$

$$\omega^2(K - m\omega^2) \left(\omega^2 - \frac{K(2m + M)}{mM} \right) mM = 0$$

Damit

$$\omega_1^2 = 0 \quad \omega_2^2 = \frac{K}{m} \quad \omega_3^2 = K \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{M} \right) > \omega_2^2$$

- Eigenvektoren

– zu $\omega_1 = 0$

Der degenerierte Fall. Lineare Bewegung des gesamten Systems
Normalkoordinaten:

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_1 &= \omega_1^2 Q_1 \\ \ddot{Q}_1 &= 0 \\ Q_1(t) &= at + b \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} K & -K & 0 \\ -K & 2K & -K \\ 0 & -K & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ v_1^3 \end{pmatrix} = 0$$

$$v_1^1 = v_1^2 = v_1^3 = c$$

Normierungsbedingung Gl. (35)

$$v_1 M v_1 = 1 = \sum_{ij} M_{ij} v_1^i v_1^j = (2m + M)c^2$$

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m + M}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

– zu $\omega_2 = K/M$

$$\begin{pmatrix} 0 & -K & 0 \\ -K & 2K - KM/m & -K \\ 0 & -K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \\ v_2^3 \end{pmatrix} = 0$$

$$v_2^2 = 0, \quad v_2^1 = -v_2^3$$

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

– zu $\omega_3 = K \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{M} \right)$

$$\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{M(1 + M/2m)}} \begin{pmatrix} M/2m \\ -1 \\ M/2m \end{pmatrix}$$

Interpretation der "Eigenschwingungen":

v_1 : Geradlinig-gleichförmige Bewegung des gesamten Moleküls

v_2 : M in Ruhe, Atome 1 und 3 schwingen in Gegenphase

v_3 : * Atome 1 und 3 schwingen gleichphasig

* Atom 2 gegenphasig

* aber so, daß Gesamtmolekül ruht

- Allgemeine Lösung: Überlagerung der Eigenschwingungen je nach Anfangsbedingungen

Berechnung Normalkoordinaten als Übung

Lessons learned:

- Um Gleichgewichtspunkte linearisierte Bewegungsgleichungen zeigen Schwingungen
- Harmonisch getriebene gedämpfte lineare Systeme zeigen Resonanz
- Mehr-Körper-Systeme: Orthogonale Eigenschwingungen mit Eigenfrequenzen
- Normalkoordinaten entkoppeln die Bewegungsgleichungen

9 Fourier-Transformation

Motivation: Die Fourier-Transformation bietet eine vorteilhafte Darstellung (nicht nur) für oszillatorische Prozesse

9.1 Kontinuierliche Fourier-Transformation

- Die Fourier-Transformation $f(\omega)$ von $x(t)$ ist definiert als

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t) e^{-i\omega t} \equiv FT[x](\omega)$$

Sie existiert für alle quadratintegrierbaren Funktionen, i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} dt |x(t)|^2 < \infty$.

- Umkehrtransformation:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) e^{i\omega t} \quad (38)$$

Eigenschaften :

- Parseval'sche Gleichung, "Energieerhaltung" der Fourier-Transformation

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |x(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |f(\omega)|^2$$

Erinnere: Quadrierte Größen

- Faltungssatz

Faltung:

$$(x_1 \star x_2)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} d\tau x_1(\tau) x_2(\tau - t)$$

Das Produkt der Fourier-Transformationen zweier Funktionen ergibt die Fourier-Transformierte FT der Faltung der beiden Funktionen

$$FT[x_1 \star x_2](\omega) = f_1(\omega) f_2(\omega)$$

14. Woche

- Fourier-Transformation von Ableitungen

Mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \dot{x}(t) e^{-i\omega t} \stackrel{p.I.}{=} x(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t) (-i\omega) e^{-i\omega t} = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t) e^{-i\omega t}$$

folgt

$$FT[\dot{x}](\omega) = i\omega FT[x](\omega) \quad (39)$$

Für höhere Ableitungen entsprechend:

$$FT[x^{(n)}](\omega) = (i\omega)^n FT[x](\omega)$$

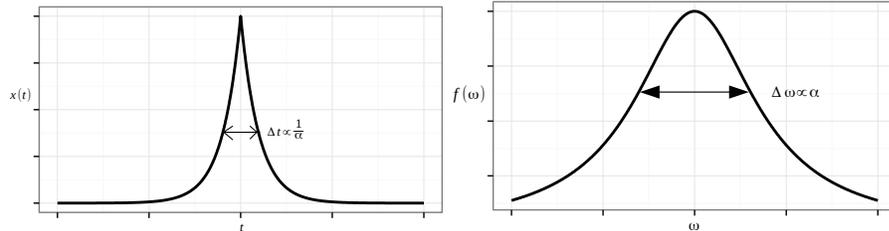
Beispiel:

- Fourier-Transformierte von

$$x(t) = e^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0$$

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} e^{-\alpha|t|} = \int_{-\infty}^0 dt e^{-i\omega t} e^{\alpha t} + \int_0^{\infty} dt e^{-i\omega t} e^{-\alpha t} \\ &= \int_0^{\infty} dt e^{(i\omega - \alpha)t} + \int_0^{\infty} dt e^{(-i\omega - \alpha)t} \\ &= \left[\frac{e^{(i\omega - \alpha)t}}{i\omega - \alpha} \right]_0^{\infty} + \left[\frac{e^{(-i\omega - \alpha)t}}{-i\omega - \alpha} \right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{i\omega - \alpha} - \frac{1}{-i\omega - \alpha} = \frac{1}{\alpha - i\omega} + \frac{1}{\alpha + i\omega} \\ &= \frac{\alpha + i\omega + \alpha - i\omega}{(\alpha - i\omega)(\alpha + i\omega)} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

- Allgemein: Ist $x(t)$ Funktion der Breite $1/\alpha$, so ist die Breite von $f(\omega) \propto \alpha$



- Begründung: Für schnelleren Abfall braucht man mehr Frequenzen

9.2 Fourier-Reihen

- Ist $x(t)$ eine periodische Funktion mit Periode T , i.e.

$$x(t + T) = x(t) \quad (40)$$

so reduziert sich die Fourier-Transformierte auf eine diskrete Summe

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (41)$$

- Die Summe in Gl. (41) enthält die zur Periode gehörende Frequenz ω und deren ganzzahlige Vielfache, genannt höhere Harmonische.

Das sichert die Periodizität von $x(t)$:

$$e^{in\omega(t+T)} = e^{in\omega t} e^{in\frac{2\pi}{T}T} = e^{in\omega t} e^{in2\pi} = e^{in\omega t} (e^{2\pi i})^n = e^{in\omega t}$$

- Bestimmung der Koeffizienten c_n

Multipliziere Gl. (41) mit $e^{-i\omega m t}$ und integriere von 0 bis T

$$\int_0^T dt e^{-i\omega m t} x(t) = \int_0^T dt e^{i\omega m t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\int_0^T dt e^{i(n-m)\omega t}}_{=T \delta_{nm}}$$

Falls $n \neq m$

$$\int_0^T dt e^{i(n-m)\omega t} = \left[\frac{e^{i(n-m)\omega t}}{i(n-m)\omega} \right]_0^T = \frac{e^{i(n-m)\frac{2\pi}{T}T} - 1}{i(n-m)\omega} = \frac{1 - 1}{i(n-m)\omega} = 0$$

Für $n = m$

$$\int_0^T dt e^{i(n-m)\omega t} = \int_0^T dt = T$$

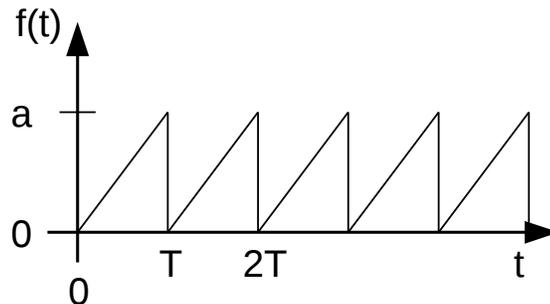
Ergo

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{-in\omega t} x(t)$$

Beispiel:

- Sägezahn

$$x(t) = a \frac{t}{T}, \quad 0 \leq t < T, \quad \text{periodisch fortgesetzt}$$



- Für $n = 0$

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{-i\omega 0 t} a \frac{t}{T} = \frac{a}{T^2} \int_0^T dt t = \frac{a}{T^2} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^T = \frac{a}{2}$$

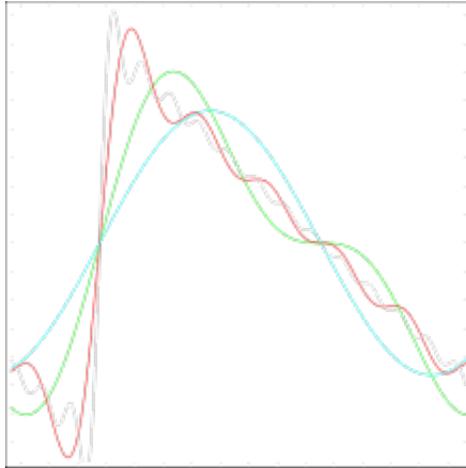
- Für $n \neq 0$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a}{T^2} \int_0^T dt e^{-in\omega t} t \stackrel{\text{p.I.}}{=} \frac{a}{T^2} \left[\frac{e^{-in\omega t}}{in\omega} t \right]_0^T - \frac{a}{T^2} \underbrace{\int_0^T dt \frac{e^{-in\omega t}}{in\omega}}_{=0} \\ &= \frac{a}{T^2} \left(\frac{T^2}{in2\pi} \right) = \frac{a}{2\pi in} \end{aligned}$$

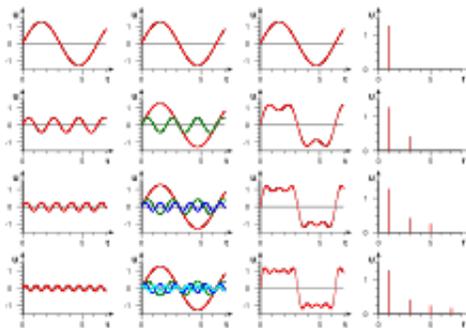
Also:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a}{2\pi in} e^{in\omega t} + \frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{2\pi in} e^{in\omega t} \\ &= \frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{2\pi in} (e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}) = \frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{\pi n} \sin(n\omega t) \\ &= \frac{a}{2} + \frac{a}{\pi} \sin(\omega t) + \frac{a}{2\pi} \sin(2\omega t) + \frac{a}{3\pi} \sin(3\omega t) + \dots \end{aligned}$$

Sägezahn(andersrum:-)-Entwicklung:



Rechteck-Entwicklung:



Auf Anzupfen der Gitarrensaite zurückkommen

Lessons learned:

- Taylor-Entwicklung ist Entwicklung nach Polynomen
- Fourier-Entwicklung ist Entwicklung nach sinus & cosinus, remember Ptolomäus

10 Dirac'sche Delta-Distribution

Motivation: Man braucht sie einfach :-) Und muss sie einfach lieb haben

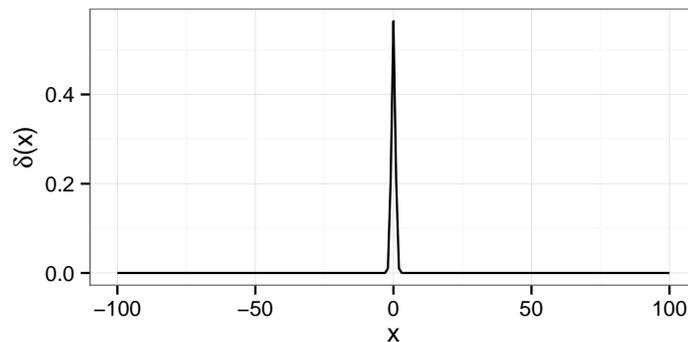
Historie:

- 1930 von Physiker Dirac lax eingeführt, weil für Quantenmechanik gebraucht
- 1945 von Mathematiker Schwartz mathematisch rigoros behandelt
- Unter Physikern lax als Delta-Funktion bezeichnet

Definitionen

- Definition (body-waving)

$$\delta(x) := \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}, \quad \text{so dass} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1$$

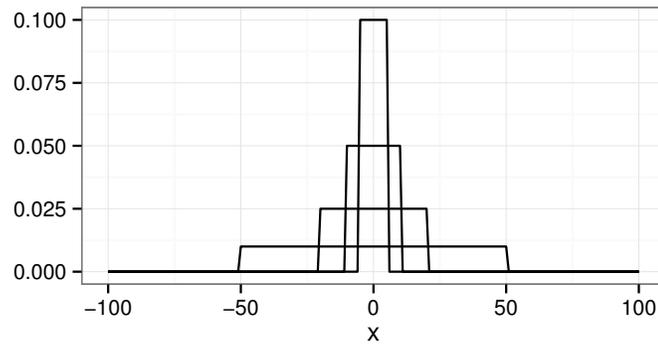


Was ist $2\delta(x)$?

- Definition (hand-waving)

Kastenfunktion

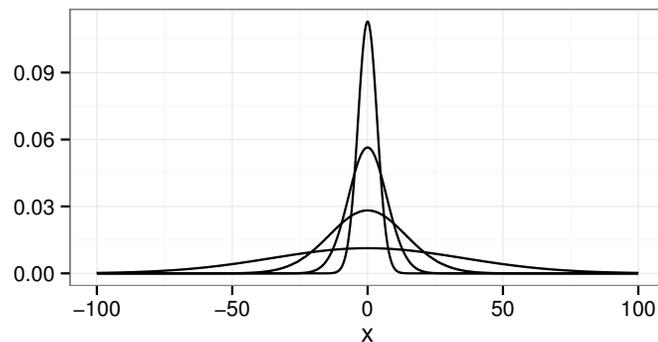
$$\delta(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \begin{cases} 1/(2h) & |x| \leq h \\ 0 & |x| > h \end{cases}$$



Wer es etwas glatter haben möchte:

Betrachte Folge von Gauß-Glocken, die immer spitzer werden, bei gleich bleibender Fläche

$$\delta(x) := \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-\frac{x^2}{n}}$$



- Mathematisch präzise Definition:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(x) = f(0) \quad (42)$$

D.h. formal macht $\delta(x)$ nur unter einem Integral Sinn.

Anders formuliert:

$$" \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) . "$$

ist ein Objekt, das eine Funktion $f(x)$ fressen will und den Wert $f(0)$ der Funktion ausspuckt.

Formal ähnlich zu Skalarprodukt, das zwei Vektoren fressen will und eine Zahl ausspuckt

Per Definition gelten die Regeln für

- Variablensubstitution

Z.B. mit $x' = x - x_0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) := \int_{-\infty}^{\infty} dx' \delta(x') f(x' + x_0) = f(x_0)$$

oder mit $x' = x/c$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta\left(\frac{x}{c}\right) f(x) := \int_{-\infty}^{\infty} dx' \delta(x') f(cx') |c| = |c| f(0)$$

- Ableitung der δ -Funktion durch partielle Integration definiert

$$\int \delta'(x) f(x) := - \int \delta(x) f'(x) = -f'(0) \quad (43)$$

Randterme verschwinden, da $\delta(x)$ dort verschwindet.

Dirac'sche δ -Distribution ist kontinuierliche Verallgemeinerung des Kronecker δ_{ij}

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_j = x_i \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - y) f(x) = f(y)$$

Besonders wichtig sind Bezüge zur Fourier-Transformation

- Mit der inversen Fourier-Transformation, Gl. (38) gilt

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} f(t)$$

Vergleich mit Gl. (42) ergibt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} = 2\pi\delta(t)$$

Äquivalent:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} = 2\pi\delta(\omega)$$

Interpretation:

2π mal die δ -Funktion ist die Fourier-Transformation der 1.

Mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t) e^{-i\omega t} = e^{-i\omega 0} = 1$$

ist 1 die Fouriertransformation der δ -Funktion

Fourier-Transformation der δ -Funktion hat konstantes Spektrum, "enthält alle Farben"

- Ableitungen

Ableitungen geben im Fourierraum einen Faktor $i\omega$, Gl. (39)

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega i\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} i\omega e^{-i\omega t} f(t)$$

Vergleich mit Gl. (43)

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega e^{-i\omega t} = 2\pi i \delta'(t), \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt t e^{-i\omega t} = 2\pi i \delta'(\omega)$$

Interpretation:

$2\pi i$ mal die Ableitung der δ -Funktion ist die Fourier-Transformierte von t .

Lessons learned:

- Dirac'sche δ -Distribution verallgemeinert Kronecker δ_{ij}
- Enge Bezüge zur Fourier-Transformation

TODO: look for TODOs

Cauchy-Riemann braucht 2D Taylor, braucht partielle Ableitungen. Ev. schon früher einführen oder ins Kapitel partielle Ableitungen

11 Danksagung

Ich danke meinen Kollegen PD Dr. Thomas Wellens, apl. Prof. Dr. Thomas Filk und Prof. Dr. Gerhard Stock dafür, dass ich schamlos in ihren Skripten zu ihren Vorlesungen zu diesem Thema wildern durfte.