Übungen zur Theoretischen Physik I

(Vorlesung J. Timmer, WS 2013/14)

Aufgabenblatt 1

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Ableitungen

Differenzieren Sie folgende Funktionen f_i nach x:

(a) $f_1 : x \mapsto \cos(x^2)$

(b) $f_2 : x \mapsto x^2 e^x$

(c) $f_3 : x \mapsto x \ln(x)$

(d) $f_4 : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$

(e) $f_5 : x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

(f) $f_6 : x \mapsto \arctan(x)$

(g) $f_7 : x \mapsto \ln(\cos(x))$

Als bekannt vorausgesetzt werden hier nur die Ableitungen von x^2, $\sin(x)$, $\cos(x)$ und e^x, aus denen dann die Ableitungen obiger Funktionen mit Hilfe diverser Regeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel und Umkehrregel) bestimmt werden sollen.

Aufgabe 2: Integrale

Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $I_1 = \int_0^\infty e^{-x} x^2 \, \mathrm{d}x$

(b) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, \mathrm{d}x$

(c) $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \, \mathrm{d}x$

(d) $I_4 = \int_0^\infty x e^{-\sqrt{1+x^2}} \, \mathrm{d}x$

Aufgabe 3: Taylor-Entwicklung I

Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung der folgenden Funktionen f_i um den jeweils angegebenen x-Wert x_0:

(a) $f_1(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$

(b) $f_2(x) = \sin(x)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$

(c) $f_3(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$

(d) $f_4(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 4: Variablentransformation

Sei $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit der Ableitung $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$. Die umkehrbare und differenzierbare Funktion $g : x \mapsto y = g(x)$ ist eine Variablentransformation von der Variablen x in die Variable y. Damit lässt sich die von x abhängige Funktion f in eine von y abhängige Funktion $\tilde{f}$ transformieren:

$$\tilde{f}(y) := f \circ g^{-1}(y) = f\big(g^{-1}(y)\big).$$

Wie sieht allgemein der Zusammenhang zwischen der Ableitung $\frac{df(x)}{dx}$ der ursprünglichen Funktion $f(x)$ und der Ableitung der transformierten Funktion $\frac{d\tilde{f}(y)}{dy}$ aus?

Verifizieren Sie das Ergebnis, indem Sie für $f(x) = x^2$ und $y = g(x) = e^{-x}$ einmal zuerst die Funktion $f(x)$ in die Funktion $\tilde{f}(y)$ transformieren und diese dann nach y ableiten und einmal die Funktion $f(x)$ zuerst nach x ableiten, um diese Ableitung mit dem erhaltenen Zusammenhang in die Ableitung von $\tilde{f}(y)$ umzurechnen.