Übungen zur Theoretischen Physik I

(Vorlesung J. Timmer, WS 2013/14)

Aufgabenblatt 3

Abgabe am Donnerstag, den 7.11.13 nach der Vorlesung

Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name und Name des Tutors deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen (8 Punkte)

(a) Prüfen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen die Differenzierbarkeit im Komplexen folgender Funktionen (i)–(ii) und geben Sie gegebenenfalls die Ableitung an. Falls die Funktion nicht differenzierbar ist, zeigen Sie dies auch an der Nichteindeutigkeit des Grenzwertes

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \tag{1}$$

für mindestens ein $a \in \mathbb{C}$.

(i) $f(z) = e^z$ mit $z \in \mathbb{C}$

(ii) $f(z) = |z|^2$ mit $z \in \mathbb{C}$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, dass für holomorphe Funktionen f und g auch die Summe $f+g$, das Produkt $f \cdot g$ und die Verknüpfung $f \circ g$ holomorph sind.

(c) Berechnen Sie die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen in Polarkoordinaten, d.h. partielle Differentialgleichungen für $\frac{\partial R}{\partial r}$, $\frac{\partial R}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$, wobei r, φ, R und Φ über

$$z = r\, e^{i\varphi} \tag{2}$$

$$f(z) = R(r, \varphi)\, e^{i\Phi(r,\varphi)} \tag{3}$$

definiert sind.

(d) Sei $f(z)$ eine Funktion von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass wenn $|f(z)|$ holomorph ist, $|f(z)|$ dann konstant ist.

Aufgabe 2: Skalarprodukt (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass sich das Skalarprodukt $g(\vec{x}, \vec{y})$ auf dem endlichdimensionalen Vektorraum V allgemein in der Form

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{ij} g_{ij} x_i y_j \tag{4}$$

schreiben lässt. Hierbei seien x_i und y_i die Koeffizienten der Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ in einer gegebenen Basis $\mathcal{E}$. Welche Bedeutung haben die Koeffizienten g_{ij} ausgedrückt durch die

Basisvektoren?

(b) Gegeben seien der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit der “kanonischen Basis” $\vec{e}_1 = (1,0)$ und $\vec{e}_2 = (0,1)$ und dem “kanonischen” Skalarprodukt $(x_1, x_2)^T \cdot (y_1, y_2)^T = x_1 y_1 + x_2 y_2$. Im Folgenden sollen die Vektoren $\vec{b}_1 = (2,1)$ und $\vec{b}_2 = (1,3)$ als neue Basis eingeführt werden.

(i) Zeigen Sie, dass $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ linear unabhängig sind.

(ii) Wie lauten die Koeffizienten g_{ij} aus Gleichung (4) in der neuen Basis? Beachten Sie hierzu, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren unabhängig von der Wahl der Basis sein soll. Die Vektoren sind nun bzgl. der jeweiligen Basen zu verstehen:

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}_{\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}} = n\vec{b}_1 + m\vec{b}_2 \text{ und } \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}} = k\vec{e}_1 + l\vec{e}_2$$

(iii) Wie lautet die Zerlegung von $\vec{e}_i$, $i = 1, 2$, in der neuen Basis?