Übungen zur Theoretischen Physik I

(Vorlesung J. Timmer, WS 2013/14)

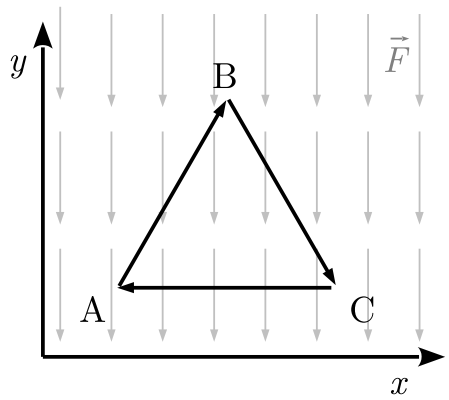
Aufgabenblatt 4

Abgabe am Donnerstag, den 14.11.13 nach der Vorlesung

Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name und Name des Tutors deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Skalarprodukt und Verschiebungsarbeit (4 Punkte)

(a) Gegeben seien ein homogenes Kraftfeld $\vec{F} = (0, -g)$ und ein gleichseitiges Dreieck $\Delta(A, B, C)$ mit Seitenlänge 1, siehe Skizze. Berechnen Sie die Verschiebungsarbeit W entlang der Wegstücke $A \to B$, $B \to C$ und $C \to A$.



(b) Zeigen Sie, dass die Verschiebungsarbeit entlang jedes geschlossenen Weges, der sich als Verkettung endlich vieler Vektoren schreiben lässt, verschwindet.

Aufgabe 2: Skalarprodukt und Norm (4 Punkte)

Der Betrag (auch die Norm genannt) eines Vektors $\vec{x}$ lässt sich folgendermaßen durch das Skalarprodukt definieren: $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$

(a) Beweisen Sie unter Benutzung der allgemeinen Eigenschaften des Skalarprodukts die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$$

Hinweis: Benutzen Sie, dass $|\vec{x} - \gamma\vec{y}|^2 \geq 0$ für beliebiges $\gamma \in \mathbb{R}$, insbesondere für $\gamma = \vec{x} \cdot \vec{y}/|\vec{y}|^2$.

(b) Zeigen Sie, dass der Betrag die allgemeinen Eigenschaften einer Norm erfüllt:

(i) $|\vec{x}| \geq 0$, $|\vec{x}| = 0 \Rightarrow \vec{x} = 0$

(ii) $|\lambda\vec{x}| = |\lambda||\vec{x}|$

(iii) $|\vec{x}+\vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ (Dreiecksungleichung)

Hinweis: Beweisen Sie die Dreiecksungleichung, indem Sie beide Seiten quadrieren und dann die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung verwenden.

Aufgabe 3: Norm von Funktionen (4 Punkte)

Sei V der Vektorraum der stetigen und differenzierbaren Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Überprüfen Sie ob folgende Abbildungen $n_i : V \to \mathbb{R}$ eine Norm definieren:

(i) $n_1(f) = \max\limits_{x\in[a,b]} (f(x)^2)$

(ii) $n_2(f) = \max\limits_{x\in[a,b]} (|f(x)|)$

(iii) $n_3(f) = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}$

(iv) $n_4(f) = \max\limits_{x\in[a,b]} (|f'(x)|)$

Aufgabe 4: Skalarprodukt und Vektorprodukt I (4 Punkte)

Gegeben seien Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

(a) Beweisen Sie die Identität

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)\vec{a}.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = 0$, wenn $\vec{a}$ sich als $\vec{a} = d_1\vec{b} + d_2\vec{c}$ mit $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ schreiben lässt.