Übungen zur Theoretischen Physik I

(Vorlesung J. Timmer, WS 2013/14)

Aufgabenblatt 5

Abgabe am Donnerstag, den 21.11.13 nach der Vorlesung

Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name und Name des Tutors deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Skalarprodukt und Vektorprodukt II (4 Punkte)

Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{x}$ mit

$$\vec{x} = \vec{b} - \frac{1}{\|\vec{a}\|^2}(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}$$

senkrecht aufeinander stehen.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} \cdot \vec{b}\|^2$$

gilt.

Aufgabe 2: Kern und Bild linearer Abbildungen (6 Punkte)

Seien V und W Vektorräume und $A : V \to W$ eine lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass der Kern(A) $\subseteq V$ und das Bild(A) $\subseteq W$ jeweils ein Vektorraum sind.

Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass Kern(A) ein Untervektorraum von V und Bild(A) ein Untervektorraum von W ist. Ein Untervektorraum $U \subseteq X$ eines Vektorraums $(X, +, \cdot)$ über dem Körper K ist eine Menge, für die gilt:

(i) $U \neq \emptyset$

(ii) $u + v \in U$

(iii) $\lambda u \in U$

für alle $u, v \in U$ und $\lambda \in K$.

(b) Zeigen Sie, dass A genau dann injektiv ist, wenn Kern$(A) = \{0\}$.

Aufgabe 3: Matrizen (2 Punkte)

Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Unter welchen Bedingungen kommutieren die beiden Matrizen?

Aufgabe 4: Matrizen als lineare Abbildungen (4 Punkte)

Gegeben seien die folgenden drei Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Beschreiben Sie geometrisch die Wirkung dieser Abbildungen auf Vektoren im $\mathbb{R}^2$.

(b) Finden Sie aus der geometrischen Anschauung Vektoren, die

(i) sich unter der Abbildung nicht verändern,

(ii) unter der Abbildung in ihr Negatives übergehen. Für welche Matrix gibt es solche Vektoren im $\mathbb{R}^2$ nicht?