Übungen zur Theoretischen Physik I

(Vorlesung J. Timmer, WS 2013/14)

Aufgabenblatt 9

Abgabe am Donnerstag, den 19.12.13 nach der Vorlesung

Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name und Name des Tutors deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Drehimpuls in einem N-Teilchen-System (4 Punkte)

Wir betrachten ein System von N Teilchen mit den Massen $m_1, m_2, \ldots, m_N$, die gegenseitig Kräfte aufeinander ausüben, aber sonst keiner anderen äußeren Kraft unterliegen. Wir nehmen an, dass die Newton'schen Gesetze gelten, und dass die Kraft $\vec{F}_{ij}$, die von Teilchen j auf Teilchen i ausgeübt wird, parallel zur Verbindungslinie $\vec{r}_j - \vec{r}_i$ zwischen den Teilchen ist. Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen der gesamte Drehimpuls

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

erhalten ist.

Aufgabe 2: Wegintegral I (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Wegintegral

$$W = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

unabhängig von der Parametrisierung des Weges γ ist.

Aufgabe 3: Bogenlänge (4 Punkte)

Betrachen Sie die Bahnkurve

$$\gamma : \mathbb{R} \ni t \longmapsto \vec{r}(t) = \frac{1}{2} e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Zeigen Sie, das die Kurve auf dem Kegel $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$ liegt.

(ii) Verifizieren Sie, dass die Projektion der Kurve in die x-y-Ebene eine logarithmische Spirale ergibt, die Kurve sich in Polarkoordinaten also als $r(\varphi) = \frac{1}{2} e^\varphi$ schreiben lässt.

(iii) Bestimmen Sie die Bogenlänge $s(t) = \int_{-\infty}^{t} |\dot{\vec{x}}(\tau)| \mathrm{d}\tau$. Welche anschauliche Bedeutung kommt der Bogenlänge zu?

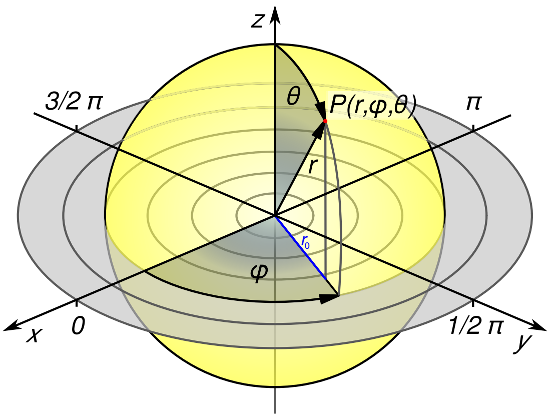
(iv) Geben Sie die Kurve in der Bogenlängenparametrisierung an. D.h. bestimmen Sie $\vec{x}(s)$ und zeigen Sie, dass $\left|\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s}\right| = 1$ gilt.

Aufgabe 4: Kugelkoordinaten (4 Punkte)

Die Kugelkoordinaten r, φ, θ sind mit den kartesischen Koordinaten x, y, z über die Beziehung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

verknüpft, siehe Skizze.



(i) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\vec{u}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}$, $\vec{u}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$ und $\vec{u}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$.

(ii) Berechnen Sie das von den Vektoren $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ und $\vec{u}_\varphi$ aufgespannte Volumen

$$V = |\vec{u}_r \cdot (\vec{u}_\theta \times \vec{u}_\varphi)| = \underbrace{\left|\det\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)\right|}_{\text{Funktionaldeterminante}}.$$

Aus V leitet sich das Volumenelement $dV = \left|\det\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)\right| \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$ ab.

(iii) Eine Kugel mit Radius R habe die radialsymmetrische Massendichte

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0\left(1 - \frac{|\vec{r}|}{R}\right) & , |\vec{r}| \leq R \\ 0 & , |\vec{r}| > R \end{cases},$$

die vom Rand bis zur Mitte hin linear ansteigt. Berechnen Sie die Gesamtmasse $M = \int \rho(\vec{r})\mathrm{d}V$ der Kugel unter Verwendung der Kugelkoordinaten.