Übungen zur Theoretischen Physik I

(Vorlesung J. Timmer, WS 2013/14)

Aufgabenblatt 11

Abgabe am Donnerstag, den 16.1.14 nach der Vorlesung

Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name und Name des Tutors deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Rotation eines zentralen Kraftfeldes (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein Kraftfeld der Form

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r},$$

wobei $f(r)$ eine beliebige differenzierbare Funktion des Abstands $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ bezeichnet, rotationsfrei ist, d.h. $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. Damit folgt unter anderem, dass die Gravitationskraft konservativ ist.

Aufgabe 2: (Nicht)konservative Kraftfelder (4 Punkte)

Gegeben sei

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,z)\} \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das Wegintegral

$$W = \oint_\gamma \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

entlang eines geschlossenen Weges γ, der einem Kreis in der x-y-Ebene um den Koordinatenursprung mit dem Radius R entspricht.

(b) Zeigen Sie, dass die Rotation von $\vec{F}$ verschwindet. Obwohl also die Rotation dieses Feldes verschwindet, ist das Integral entlang eines geschlossenen Weges nicht null. Weshalb?

Aufgabe 3: Gravitationsfeld einer homogenen Kugel (4 Punkte)

Gegeben sei eine homogene Kugel mit dem Radius R und der Masse M, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Berechnen Sie das durch die Kugel verursachte Gravitationsfeld $\vec{g}$ im Innern und im Äußern der Kugel

(a) im 3-dimensionalen Raum,

(b) im n-dimensionalen Raum. Die Oberfläche einer n-dimensionalen Kugel mit Radius r ist

$$O_n(r) = r^{n-1} \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Hinweis: Das Gravitationsfeld der Kugel ist ein rotationssymmetrisches Zentralfeld, d.h. $\vec{g}(\vec{r}) = g(r)\frac{\vec{r}}{r}$. Machen Sie eine Fallunterscheidung für $r \leq R$ und $r > R$ und nutzen Sie die Poisson-Gleichung, bzw. Gl. (18) im Skript, und den Gauß'schen Satz. Γ bezeichnet die Gamma-Funktion, welche eine dimensionsabhängige Konstante liefert, die uns hier nicht weiter interessiert.

Aufgabe 4: Stokes'scher Satz (4 Punkte)

Mithilfe des Stokes'schen Satzes können Flächenberechnungen auf Linienintegrale zurückgeführt werden, die meist leichter zu berechnen sind. Als Beispiel betrachten wir eine Ellipse mit Halbachsen a und b in der x-y-Ebene, die durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ und } z = 0$$

definiert ist. Eine mögliche Parameterdarstellung lautet

$$\vec{l}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit $0 \leq t < 2\pi$. Da der Flächennormalenvektor der Ellipse in z-Richtung zeigt (senkrecht zur x-y-Ebene), ist die Fläche A der Ellipse gleich dem Fluss des konstanten Vektorfelds $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch die Ellipse, also $A = \int_S \vec{e}_z \cdot d\vec{A}$.

(a) Finden Sie ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$, so dass $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{e}_z$.

(b) Berechnen Sie nun die Fläche A, indem Sie das Flächenintegral mit Hilfe des Stokes'schen Satzes auf ein Linienintegral über $\vec{F}$ zurückführen.