Übungen zur Theoretischen Physik I

(Vorlesung J. Timmer, WS 2013/14)

Aufgabenblatt 12

Abgabe am Donnerstag, den 23.1.14 nach der Vorlesung

Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name und Name des Tutors deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Archimedisches Prinzip (3 Punkte)

In einer Flüssigkeit im Schwerefeld beträgt der Druck p in der Tiefe z

$$p = \rho g z,$$

wobei ρ die Dichte der Flüssigkeit und g die Erdbeschleunigung ist. Die Kraft, die in dieser Tiefe auf ein Flächenelement $\mathrm{d}\vec{A}$ wirkt, ist $\mathrm{d}\vec{F} = -p \cdot \mathrm{d}\vec{A}$. Zeigen Sie hiermit das Archimedische Prinzip, wonach

$$\vec{F} = -V\rho\vec{g}$$

gilt. Die Auftriebskraft $\vec{F}$, die ein vollständig in die Flüssigkeit eingetauchter Körper mit Volumen V im Schwerefeld der Erde erfährt, ist also entgegengesetzt gleich der Gewichtskraft auf die verdrängte Flüssigkeitsportion.
Hinweis: Die Kraft ergibt sich als Integral über $\mathrm{d}\vec{F}$. Betrachten das Integral komponentenweise um den Satz von Gauß anwenden zu können.

Aufgabe 2: Aristotelische Mechanik (3 Punkte)

In der Aristotelischen Mechanik gilt die Beziehung

$$\vec{F} \propto \vec{v}$$

zwischen Kraft und Geschwindigkeit. Lösen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_{\text{Reibung}} + \vec{F}_{\text{Extern}} = -\mu\dot{\vec{x}} + \vec{F}_{\text{Extern}}$$

durch Variation der Konstanten. Zeigen Sie mit Hilfe der Lösung, dass der Aristotelische Zusammenhang zwischen Kraft und Geschwindigkeit im Limes $\mu t \gg m$ Gültigkeit besitzt.

Aufgabe 3: Separation der Variablen (3 Punkte)

Die Leistungsfähigkeit eines Radfahrers sei durch den folgenden Zusammenhang zwischen der Beschleunigung a und der Geschwindigkeit v gegeben:

$$a = \frac{\beta}{v + \gamma}.$$

Der Radfahrer startet bei $t = 0$ aus der Ruhe. Berechnen Sie $v(t)$, indem Sie die Differentialgleichung durch Separation der Variablen lösen.

Aufgabe 4: Lösen der Differentialgleichung durch Potenzreihenansatz (3 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \lambda x.$$

Machen Sie den Potenzreihenansatz

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

und überführen Sie die Differentialgleichung in eine Rekursionsgleichung für die Koeffizienten a_n. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_n für die Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Reihendarstellung der Exponentialfunktion.

Aufgabe 5: Auf vielfachen Wunsch – Substitutionsregel (3 Punkte)

Gegeben sei das bestimmte Integral

$$I = \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x.$$

(i) Berechnen Sie I durch Bestimmen der Stammfunktion.

(ii) Substituieren Sie $x = u^2$ und drücken Sie das bestimmte Integral bezüglich der neuen Variablen u aus.

(iii) Berechnen Sie I durch Bestimmen der Stammfunktion des neuen Integranden.