Übungen zur Theoretischen Physik I

(Vorlesung J. Timmer, WS 2013/14)

Aufgabenblatt 13

Abgabe am Donnerstag, den 30.1.14 nach der Vorlesung

Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name und Name des Tutors deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Sinusförmige Schwingung (3 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme für den Sinus, dass man die Funktion

$$f(x) = c \sin(x + \phi)$$

mit $x, c, \phi \in \mathbb{R}$ auch in folgender Form schreiben kann:

$$f(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und umgekehrt. Um beide Richtungen zu zeigen, geben Sie einerseits a und b als Funktion von c und ϕ an, und andererseits c und ϕ als Funktion von a und b.

Aufgabe 2: Potenzen einer 2x2-Matrix (3 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die zweite und dritte Potenz $A^2 = AA$ und $A^3 = AAA$ mit Hilfe der Rechenregel für die Matrixmultiplikation.

(b) Leiten Sie hieraus eine Formel für die n-te Potenz A^n ab und beweisen Sie diese durch Induktion nach n.

Aufgabe 3: Lineares Differentialgleichungssystem (6 Punkte)

Betrachten Sie folgendes System von Differentialgleichungen für $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) =& x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) =& x_2(t) \end{aligned}$$

bzw. in Vektor-Schreibweise

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) \tag{1}$$

mit der Matrix A aus Aufgabe 2.

(a) Berechnen Sie die Matrix

$$e^{At} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$$

mit Hilfe des Ergebnisses von Aufgabe 2 und der Reihendarstellung der Exponentialfunktion.

(b) Zeigen Sie für allgemeine reelle $m \times m$-Matrizen B, dass $\vec{x}(t) = e^{Bt}\vec{x}(0)$ eine Lösung von $\dot{\vec{x}}(t) = B\vec{x}(t)$ ist.

(c) Wie lautet die Lösung der Differentialgleichung (1) zur Anfangsbedingung $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 4: Nichtdiagonalisierbare Matrizen (4 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \tag{2}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\det(A) \neq 0$. Im Allgemeinen ist A nicht diagonalisierbar, lässt sich jedoch immer in Jordanscher Normalform schreiben. D.h. es existiert eine Matrix T der Art, dass

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_m \end{pmatrix} \text{ mit } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{s_i\times s_i}$$

und $i = 1, \ldots, m$ gilt. Die Spaltenvektoren der Matrix T sind durch die Eigenvektoren $\{\vec{h}_1^{(1)}, \ldots, \vec{h}_1^{(s_1)}, \ldots, \vec{h}_m^{(1)}, \ldots, \vec{h}_m^{(s_m)}\}$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ von A gegeben. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{\vec{x}} = J_i\vec{x}$$

komponentenweise und mittels Variation der Konstanten. Zeigen Sie hiermit, dass eine allgemeine Lösung von (2) durch

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s_i} d_{ij}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{\lambda_i t}\vec{h}_i^{(s_i-j+1)}$$

gegeben ist.