Theoretische Physik IV: Quantenmechanik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer)

Aufgabenzettel Nr. 1

Aufgabe 1: Bohr'sches Atommodell **(5 Pkt.)**

Im Bohr'schen Atommodell kann sich das Elektron im Wasserstoffatom auf Bahnen mit Radius $r_n = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, bewegen. Hierbei bezeichnet ϵ_0 die elektrische Feldkonstante, $\hbar$ das Planck'sche Wirkungsquantum, m_e die Elektronenmasse und e die elektrische Ladung des Elektrons.

i.) Berechnen Sie die Geschwindigkeit, die Energie und den Impuls des Elektrons auf diesen Bahnen um den Kern. **(3 Pkt.)**

ii.) Bestimmen Sie die de Broglie-Wellenlänge des Elektrons und berechnen Sie, wie viele Wellenlängen die n-te Elektronenbahn enthält. **(2 Pkt.)**

Aufgabe 2: Kanonische Transformation des harmonischen Oszillators **(5 Pkt.)**

Die Hamilton-Funktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

mit der Ortskoordinate q und der Impulskoordinate p. Die Funktion $\Phi(q,Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q$ ist eine erzeugende Funktion für den Koordinatenwechsel $(q,p) \to \big(Q(q,p), P(q,p)\big)$.

i.) Zeigen Sie, dass die Hamilton-Funktion in den neuen Koordinaten

$$K(Q,P) = \omega P$$

lautet. **(3 Pkt.)**

ii.) Leiten Sie die Lösung $\big(Q(t), P(t)\big)$ der Hamilton'schen Bewegunsgleichungen her. Wie lautet diese Lösung in den alten Koordinaten (q,p) ausgedrückt? **(2 Pkt.)**

Aufgabe 3: Teilchen im elektromagnetischen Feld **(5 Pkt.)**

Ein geladenes Teilchen der Masse m und Ladung e befinde sich in einem elektromagnetischen Feld. Die Hamilton-Funktion des Teilchens lautet

$$H(\vec{q},\vec{p}) = \frac{1}{2m}\Big(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{q},t)\Big)^2 + eA_0(\vec{q},t),$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit, $A_0(\vec{q},t)$ das elektrische Potential und $\vec{A}(\vec{q},t)$ das Vektorpotential bezeichnen.

i.) Betrachten Sie zunächst allgemein eine erzeugende Funktion $\Phi(\vec{q},\vec{P},t)$. Zeigen Sie, dass

$$p_i = \frac{\partial\Phi}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial\Phi}{\partial P_i}, \qquad K(\vec{Q},\vec{P}) = H\big(\vec{q}(\vec{Q},\vec{P}), \vec{p}(\vec{Q},\vec{P})\big) + \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

hinreichende Bedingungen dafür sind, dass die daraus abgeleitete Transformation kanonisch ist. *Hinweis:* Das Skript hilft. **(2 Pkt.)**

ii.) Berechnen Sie nun die kanonische Transformation, die sich aus der erzeugenden Funktion $\Phi(\vec{q},\vec{P}) = \vec{q}\cdot\vec{P} - \frac{e}{c}\lambda(\vec{q},t)$ ergibt und geben Sie die Hamilton-Funktion $K(\vec{Q},\vec{P})$ in den neuen Koordinaten an. Interpretieren Sie das Ergebnis. **(3 Pkt.)**

Münsteraufgabe

Was unterscheidet unser Münster von allen anderen deutschen Kathedralen aus der Gotik ?