Theoretische Physik IV: Quantenmechanik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer)

Aufgabenzettel Nr. 11

Aufgabe 1: Der Quanten-Zeno-Effekt **(5 Pkt.)**

Betrachten Sie den Larmor-Prozess wie in Aufgabe 2, Blatt 10. Der Hamilton-Operator war gegeben durch

$$H = \mu|\vec{B}|\sigma_3 = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_3$$

mit der Larmor-Frequenz $\omega = \frac{2\mu|\vec{B}|}{\hbar}$ und den Spin-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

i.) Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Eigenzustand $|+\rangle$ des σ_1-Operators zum Eigenwert $m_1 = +1$. Bestimmen Sie den auf 1 normierten Eigenvektor $|+\rangle \in \mathbb{C}^2$ und zeigen Sie

$$\langle +|\vec{\sigma}|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h. $|+\rangle$ is ein spezieller Blochvektor. **(1 Pkt.)**

ii.) Der Zeitentwicklungsoperator für das System lautet $U(t) = \mathbb{1}\cos\frac{\omega t}{2} - i\sigma_3 \sin\frac{\omega t}{2}$, vgl. wiederum Blatt 10. Zum Zeitpunkt $t > 0$ wird eine Messung der Observablen σ_1 durchgeführt. Welche möglichen Messwerte m_1 gibt es und wie lauten die zugehörigen Messwahrscheinlichkeiten? **(1 Pkt.)**

iii.) Die Wahrscheinlichkeit, den Messwert $m_1 = +1$ zu erhalten, ist nach der Zeit $T = \frac{\pi}{\omega}$ auf null gesunken. Führen Sie gedanklich N Messungen zu Zeiten $\{t_n = \frac{n\pi}{N\omega} |\ n = 1, \ldots, N\}$ durch. Wie hoch ist nun die Wahrscheinlichkeit, nach der Zeit $T = t_N$ (und zu allen anderen Messzeitpunkten $t_{n<N}$) den Messwert $m_1 = 1$ zu erhalten? Plotten Sie die Wahrscheinlichkeitswerte in Abhängigkeit von N. Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch. **(3 Pkt.)**

Aufgabe 2: Der lineare Stark-Effekt beim Wasserstoffatom **(6 Pkt.)**

Der lineare Stark-Effekt bezeichnet die Aufspaltung des Energiewerts E_2 zur Hauptquantenzahl $n = 2$ im Wasserstoffatom durch ein elektrisches Feld. Diese Energieaufspaltung kann mithilfe der Störungstheorie in 1. Ordnung berechnet werden.
Wir betrachten den Hamilton-Operator

$$H = H_0 + \lambda W$$

mit $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta - \frac{e^2}{r}$ und $W = e\varphi(\vec{x}) = -e|\vec{E}|x_3$. D.h. das elektrische Potential ändere sich nur entlang der x_3-Achse. Der Energiewert E_2 ist zunächst 4-fach entartet. Der zugehörige Eigenraum wird durch die orthonormierten Eigenvektoren des ungestörten Hamilton-Operators $\{|2,0,0\rangle, |2,1,-1\rangle, |2,1,0\rangle, |2,1,1\rangle\}$ aufgespannt. Diese Vektoren sind auf dem Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ durch reellwertige Funktionen dargestellt:

$$|n,l,m\rangle \quad \widehat{=} \quad \phi_{n,l,m}(\vec{x}) = \frac{1}{r} u_{n,l}(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi),$$

mit den Radial- und Kugelflächenfunktionen

$$
\begin{aligned}
u_{1,0}(r) &= \frac{2}{\sqrt{a_0}} \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{a_0}} & Y_0^0(\vartheta, \varphi) &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \\
u_{2,0}(r) &= \frac{1}{\sqrt{2a_0}} \frac{r}{a_0} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} & Y_1^0(\vartheta, \varphi) &= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\vartheta \\
u_{2,1}(r) &= \frac{1}{\sqrt{24a_0}} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{2a_0}} & Y_1^{\pm 1}(\vartheta, \varphi) &= \mp \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\pm i\varphi} \sin\vartheta.
\end{aligned}
$$

i.) Zeigen Sie für die Elemente der sogenannten Störmatrix $\langle 2, l, m|W|2, l', m'\rangle$, dass

$$\langle 2,0,0|W|2,1,0\rangle = \langle 2,1,0|W|2,0,0\rangle \not\equiv 0,$$

während alle anderen Matrixelemente verschwinden. **(3 Pkt.)**
Lösungsvorschlag: Nutzen Sie die Symmetrie von W in Form von $\mathcal{P}W = -W\mathcal{P}$ und $L_3 W = W L_3$, um zu beweisen, dass Matrixeinträge verschwinden müssen, wann immer $l = l'$ oder $m \neq m'$ gilt.

ii.) Leiten Sie aus der Gestalt der Störmatrix ihre Eigenvektoren $\{|\alpha\rangle|\ \alpha = 1, \ldots, 4\}$ als reelle Linearkombinationen der $\{|2,0,0\rangle, |2,1,-1\rangle, |2,1,0\rangle, |2,1,1\rangle\}$ ab. Berechnen Sie damit die Energiekorrekturen

$$\Delta_\alpha = \langle \alpha|W|\alpha\rangle$$

zum Energiewert E_2. **(3 Pkt.)**
Hinweis: Die Radialfunktionen bilden eine Orthnormalbasis bezüglich des Skalarprodukts $\langle u|v\rangle := \int u^*(r)v(r)\mathrm{d}r$.

Aufgabe 3: EPR-Paradoxon **(4 Pkt.)**

Lesen Sie das EPR-Paper (verlinkt auf der Internetseite der Vorlesung) und fassen Sie dieses stichpunktartig zusammen.

Münsteraufgabe

Wie steht das Münster mit dem Symposion von Platon in Zusammenhang? Studieren Sie dazu die Apokalypse des Johannes und die Schriften von Proklos, Plotin und des Abtes Suger von St. Denis.