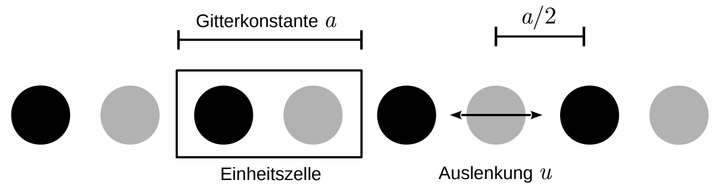
Theoretische Physik IV: Quantenmechanik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer)

Aufgabenzettel Nr. 2

Aufgabe 1: Dispersionsrelation von Phononen im Festkörper (10 Pkt.)

Als Modell für einen Festkörper in einer Dimension diene eine Kette aus Teilchen zweier Sorten $\alpha = 1,2$ mit Massen m_1 und m_2. Die Atome befinden sich in einem eindimensionalen Gitter mit Gitterkonstante a, der Abstand zwischen Atomen im Gleichgewicht sei $\frac{a}{2}$ (siehe Skizze).



Die Kopplung benachbarter Atome lasse sich durch ein harmonisches Potential mit Kopplungskonstante D beschreiben. Kopplungen, die über den nächsten Nachbarn hinaus gehen, werden vernachlässigt.

i.) Zeigen Sie aus der klassischen Mechanik, dass für die Auslenkungen $u_{n,\alpha}$ von Teilchen der Sorte α in Zelle n die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{u}_{n,1} &= D(u_{n-1,2} - 2u_{n,1} + u_{n,2}) \\ m_2 \ddot{u}_{n,2} &= D(u_{n,1} - 2u_{n,2} + u_{n+1,2}) \end{aligned} \tag{1}$$

gelten. **(2 Pkt.)**

ii.) Die Bewegungsgleichungen lassen sich mithilfe des Ansatzes

$$u_{n,\alpha}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{m_\alpha}} r_\alpha(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k x_n - \omega(k) t\right)} \tag{2}$$

lösen. Hierbei bezeichne x_n die Positionen der Einheitszellen. Machen Sie sich klar, welche Beziehung zwischen $u_{n,\alpha}$ und $u_{n\pm1,\alpha}$ besteht und leiten Sie mithilfe der Gleichungen (1) und (2) die Bedingung

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} r_1(k) \\ r_2(k) \end{pmatrix} = 0$$

für die Koeffizienten $r_\alpha(k)$ her. Hierbei bezeichnet $\mathbf{M}$ eine 2×2-Matrix, die noch von D, $m_{1/2}$, ω, k und a abhängt. **(2 Pkt.)**

iii.) Welche Bedingung muss $\mathbf{M}$ erfüllen damit das System nicht nur die triviale Lösung $u_{n,\alpha}(t) = 0$ besitzt? Zeigen Sie, dass diese Bedingung erfüllt ist, wenn die Dispersionsrelation

$$\omega_\pm^2 = D\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \pm D\sqrt{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^2 - \frac{2}{m_1 m_2}\big(1 - \cos(ka)\big)}$$

gilt. **(2 Pkt.)**

iv.) Plotten Sie die Verläufe $\omega_\pm(k) = \sqrt{\omega_\pm(k)^2}$, die als optischer (+) und akustischer (−) Zweig bezeichnet werden, für unterschiedliche Verhältnisse $\frac{m_1}{m_2}$. **(2 Pkt.)**

v.) Zeigen Sie für den akustischen Zweig, dass $\omega_-(k)$ für $ka \ll 1$ die Dispersionrelation $\omega_-(k) = c_S|k|$ einer akustischen Welle erfüllt. **(2 Pkt.)**

Aufgabe 2: Die Klein-Gordon-Gleichung **(5 Pkt.)**

Im Rahmen einer relativistischen Quantenmechanik müssen Lösungen einer Wellenmechanik

$$\psi(t,x) = A\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(Et-px)} \tag{3}$$

die Dispersionsrelation $E^2 = (m_0c^2)^2 + c^2p^2$ erfüllen.

i.) Verifizieren Sie, dass die Gleichungen

$$\hat{E}\psi := \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = E\psi$$
$$\hat{p}\psi := -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi = p\psi$$

gemäß des Korrespondenzprinzips gelten. **(1 Pkt.)**

ii.) Leiten Sie, analog zur Schrödinger-Gleichung, aus der Dispersionsrelation und dem Korrespondenzprinzip die Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(t,x) = 0$$

her. **(2 Pkt.)**

iii.) Die relativistische Dispersionsrelation lautet streng betrachtet $E = \sqrt{(m_0c^2)^2 + c^2p^2}$. Welche Folgen hat die Verwendung der quadrierten Dispersionsrelation? *Hinweis:* Lösen Sie die Klein-Gordon-Gleichung mit dem Ansatz der Gleichung (3). **(2 Pkt.)**

Münsteraufgabe

Wie hängt die Höhe der Hahnentürme und die Breite des Münsters mit seiner Namensgeberin zusammen?