Theoretische Physik IV: Quantenmechanik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer)

Aufgabenzettel Nr. 3

Aufgabe 1: Beschränkte und unbeschränkte Operatoren **(5 Pkt.)**

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\hat{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator auf $\mathcal{H}$. Dieser heißt *beschränkt*, wenn seine Operatornorm

$$\|\hat{A}\| := \sup_{|\psi\rangle \in \mathcal{H}} \frac{\|\hat{A}\,|\psi\rangle\,\|}{\|\,|\psi\rangle\,\|}$$

endlich ist. Hierbei wird die Norm auf dem Hilbertraum durch das Skalarprodukt induziert, d.h. $\|\,|\psi\rangle\,\| := \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$.

i.) Sei nun $\hat{A}$ beschränkt, selbstadjungiert und das Spektrum $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von $\hat{A}$ sei diskret. Zeigen Sie mithilfe der Spektraldarstellung

$$\hat{A} = \sum_n \lambda_n \,|n\rangle\,\langle n|\,,$$

dass $\|\hat{A}\| = \max_n |\lambda_n|$ gilt. **(2 Pkt.)**

ii.) Der Spektralsatz gilt auch für unbeschränkte Operatoren und lässt sich nutzen, um Funktionen von Operatoren zu bilden: Sei $\hat{H}$ ein unbeschränkter, selbstadjungierter Operator mit Spektrum $\{E_n \mid E_n = \hbar\omega(\frac{1}{2} + n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie mithilfe der Spektraldarstellung von $\hat{H}$, dass

$$\hat{\varrho} \equiv \exp\Big(-\beta\hat{H}\Big) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta\hat{H})^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta E_n}\,|n\rangle\,\langle n|$$

gilt. Ist $\hat{\varrho}$ beschränkt oder unbeschränkt? **(3 Pkt.)**

Aufgabe 2: Operatoren mit kontinuierlichem Spektrum **(10 Pkt.)**

Die in Aufgabe 1 verwendeten Operatoren hatten alle ein diskretes Spektrum $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, für welches man Zustände $|n\rangle \in \mathcal{H}$ findet, so dass die Eigenwertgleichung $\hat{A}\,|n\rangle = \lambda_n\,|n\rangle$ gilt. Für Operatoren mit kontinuierlichen Spektren existieren solche Zustände im Allgemeinen nicht, was in dieser Aufgabe anhand der Orts- und Impulsoperatoren veranschaulicht wird.
Sei $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ der Hilbertraum der quadratintegrablen Funktionen. Eine Teilmenge dieses Funktionenraums ist der Schwartz-Raum

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0 : \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}\phi(x)\right| < \infty\right\} \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R}).$$

Während ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ immer mit seinem Dualraum $\mathcal{H}'$ identifiziert werden kann, gilt für den Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Hieraus folgt die Beziehung

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

der drei Räume, die als *Gelfandsches Raumtripel* bezeichnet werden.

i.) Zeigen Sie, dass die Operatoren $\hat{x} : (\hat{x}\phi)(x) = x\phi(x)$ und $\hat{p} : (\hat{p}\phi)(x) = \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(x)$ <u>lineare</u>, <u>unbeschränkte</u> Operatoren auf <u>$\mathcal{S}(\mathbb{R})$</u> sind. **(4 Pkt.)**

ii.) Wegen $\int \phi^*(x)\hat{A}\psi(x)\mathrm{d}x = \int(\hat{A}^\dagger\phi(x))^*\psi(x)\mathrm{d}x$ kann jedem Operator $\hat{A} : |\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle = |\hat{A}\psi\rangle = \hat{A}\,|\psi\rangle$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ein entsprechender (adjungierter) Operator $\hat{A}^\dagger : \langle\psi| \mapsto \langle\psi'| = \langle\hat{A}\psi| = \langle\psi|\,\hat{A}^\dagger$ auf dem Dualraum $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ zugewiesen werden. Zeigen Sie, dass die Funktionale

$$\begin{aligned}\langle\phi_\lambda| : |\psi\rangle &\mapsto \langle\phi_\lambda|\psi\rangle = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda x}\psi(x)\mathrm{d}x \\ \langle\delta_\lambda| : |\psi\rangle &\mapsto \langle\delta_\lambda|\psi\rangle = \psi(\lambda)\end{aligned}$$

aus dem Dualraum $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ Lösungen zu den verallgemeinerten Eigenwertgleichungen

$$\begin{aligned}\langle\hat{p}\phi_\lambda| &= \langle\phi_\lambda|\,\hat{p}^\dagger = \lambda\,\langle\phi_\lambda| \\ \langle\hat{x}\delta_\lambda| &= \langle\delta_\lambda|\,\hat{x}^\dagger = \lambda\,\langle\delta_\lambda|\end{aligned}$$

sind. **(2 Pkt.)**
Bemerkung: Während es die (nicht quadratintegrable) Funktion $\phi_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}\lambda x}$ gibt, die $(\hat{p}\phi_\lambda)(x) = \lambda\phi_\lambda(x)$ erfüllt, gibt es die entsprechende Funktion für den Ortsoperator nicht. Dennoch ist die Schreibweise $\hat{x}\delta(x-\lambda) = \lambda\delta(x-\lambda)$ mit $\delta(x-\lambda) \simeq \langle\delta_\lambda|$ sehr gebräuchlich.

iii.) Zeigen Sie die verallgemeinerten Vollständigkeitsrelationen

$$\begin{aligned}\forall\phi,\psi :\ \langle\phi|\psi\rangle &= \langle\phi|\left(\int \mathrm{d}\lambda\,|\delta_\lambda\rangle\,\langle\delta_\lambda|\right)|\psi\rangle := \int \mathrm{d}\lambda\,\langle\delta_\lambda|\phi\rangle^*\,\langle\delta_\lambda|\psi\rangle \\ \langle\phi|\psi\rangle &= \langle\phi|\left(\int \mathrm{d}\lambda\,|\phi_\lambda\rangle\,\langle\phi_\lambda|\right)|\psi\rangle := \int \mathrm{d}\lambda\,\langle\phi_\lambda|\phi\rangle^*\,\langle\phi_\lambda|\psi\rangle\end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Eigenschaft $\mathcal{F}^{-1}\circ\mathcal{F} = \mathbb{1}$ der Fouriertransformation $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. **(2 Pkt.)**

iv.) Betrachten Sie den Differentialoperator $\hat{D} :\ (\hat{D}\psi)(x) = x\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$\langle\hat{D}\delta_0| = \langle\delta_0|\,\hat{D}^\dagger = -\,\langle\delta_0|$$

gilt. **(2 Pkt.)**
Bemerkung: Im ursprünglichen Raum lautete diese Gleichung $x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x) = -\delta(x)$ mit der "Funktion" $\delta(x)$.

Münsteraufgabe

Verlässt man das von 1999-2004 restaurierte Hauptportal des Münsters, steht rechter Hand eine von vorne reichgeschmückte schöne Frau. Was will uns deren Rückseite sagen?