Theoretische Physik IV: Quantenmechanik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer)

Aufgabenzettel Nr. 4

Aufgabe 1: Rechnen mit Kommutatoren **(5 Pkt.)**

Gegeben seien die Operatoren $\hat{x}$ (Ortsoperator), $\hat{p}$ (Impulsoperator), $\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ (kinetische Energie) und $\hat{V} = \frac{1}{2}D\hat{x}^2$ (harmonisches Potential)

i.) Berechnen Sie $[\hat{x}, \hat{T}]$, $[\hat{V}, \hat{p}]$ und $[\hat{T}, \hat{V}]$. Interpretieren Sie das Ergebnis. **(2 Pkt.)**

Ein weiterer wichtiger Operator ist der Paritätsoperator $\hat{P} : (\hat{P}\psi)(x) = \psi(-x)$, der eine Wellenfunktion in ihre gespiegelte Wellenfunktion überführt.

ii.) Zeigen Sie, dass es sich bei $\hat{P}$ um einen unitären Operator handelt. **(1 Pkt.)**

iii.) Zeigen Sie, dass $[\hat{P}, \hat{T}] = 0$ und $[\hat{P}, \hat{V}] = 0$ gilt und interpretieren Sie das Ergebnis wiederum. Welche hinreichende Bedingung muss ein allgemeines Potential $\hat{V} : (\hat{V}\psi)(x) = V(x)\psi(x)$ erfüllen, um mit dem Pariatätsoperator zu vertauschen? **(2 Pkt.)**

Aufgabe 2: Der Translationsoperator **(5 Pkt.)**

Gegeben Sei der Operator $\hat{U}(a) = e^{-\frac{i}{\hbar}a\hat{p}}$ mit dem Impulsoperator $\hat{p}$ und dem Skalar $a \in \mathbb{R}$.

i.) Zeigen Sie, dass $\forall a, b \in \mathbb{R} : \hat{U}(a)\hat{U}(b) = \hat{U}(a + b)$ gilt. Zeigen und benutzen Sie hierfür, dass $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}$ ist, wenn $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ gilt. **(2 Pkt.)**

ii.) Zeigen Sie, dass $\hat{U}(a)$ unitär ist. **(1 Pkt.)**

iii.) Zeigen Sie für die Eigendistributionen $\langle\delta_\lambda|$ des Ortsoperators $\hat{x}$, dass $\langle\hat{U}(a)\delta_\lambda| = \langle\delta_{\lambda+a}|$ gilt. **(2 Pkt.)**

Aufgabe 3: Orts- und Impulsoperator in Orts- und Impulsraum **(5 Pkt.)**

Die Fouriertransformation

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad & \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ & \psi \longmapsto \tilde{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{-\frac{i}{\hbar}px}\psi(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

überführt jede *Ortswellenfunktion* $\psi(x)$ in eine *Impulswellenfunktion* $\tilde{\psi}(p)$.

i.) Sei $\hat{A}_x : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ein linearer Operator in der Ortsdarstellung. Ein linearer Operator $\hat{A}_p : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist genau dann die Impulsdarstellung von $\hat{A}_x$, wenn

$$\forall\psi \in \mathcal{S} : \ \mathcal{F}(\hat{A}_x\psi) = \hat{A}_p\mathcal{F}(\psi)$$

gilt. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \hat{x}_p : \quad & (\hat{x}_p\phi)(p) = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\phi}{\partial p}(p) \\ \hat{p}_p : \quad & (\hat{p}_p\phi)(p) = p\phi(p) \end{aligned}$$

die Impulsdarstellungen der Orts- und Impulsoperatoren sind. **(2 Pkt.)**

Jede Impulswellenfunktion kann durch die inverse Fouriertransformation

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}: \quad & \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ & \tilde{\psi} \longmapsto \psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{\frac{i}{\hbar}px} \tilde{\psi}(p) \mathrm{d}p \end{aligned}$$

wieder in die entsprechende Ortswellenfunktion überführt werden.

ii.) Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformation eine Isometrie bezüglich des Skalarprodukts auf $\mathcal{S}$ ist, d.h. **(1 Pkt.)**

$$\forall \phi, \psi \in \mathcal{S}: \quad \langle \phi | \psi \rangle = \langle \tilde{\phi} | \tilde{\psi} \rangle$$

iii.) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert einer Observablen unabhängig von der Darstellung ist, d.h. **(1 Pkt.)**

$$\forall \psi \in \mathcal{S}: \quad \langle \psi | \hat{A}_x | \psi \rangle = \left\langle \tilde{\psi} \middle| \hat{A}_p \middle| \tilde{\psi} \right\rangle$$

iv.) Sei $\hat{A}_x = \sum_n \lambda_n |n\rangle \langle n|$ ein Operator in seiner Spektraldarstellung. Wie lautet die Spektraldarstellung von $\hat{A}_p$? **(1 Pkt.)**

Münsteraufgabe

Wie erklärt sich der berühmteste Wasserspeier des Münsters?