Theoretische Physik IV: Quantenmechanik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer)

Aufgabenzettel Nr. 7

Aufgabe 1: Relationen zwischen Hermite-Polynomen **(8 Pkt.)**

Gegeben seien die Hermite-Polynome H_n mit

$$H_n(y) := (-1)^n e^{y^2} \left[\frac{\partial^n}{\partial y^n} e^{-y^2}\right] \tag{1}$$

i.) Zeigen Sie ausgehend von Gl. (1), dass H_n die Differentialgleichung $v''(y)-2yv'(y)+(\varepsilon-1)v(y) = 0$ mit $\varepsilon = 2n+1$ erfüllt (vgl. Skript). **(2 Pkt.)**
Hinweis: Setzen Sie H_n' und H_n'' in die Differentialgleichung ein,

$$\text{Zwischenergebnis:} \quad \left[\frac{\partial^{n+2}}{\partial y^{n+2}} + 2y\frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}} + (2n+2)\frac{\partial^n}{\partial y^n}\right] e^{-y^2} = 0, \tag{2}$$

und zeigen Sie die Gültigkeit von Gl. (2) per Induktion.

ii.) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial H_n}{\partial y} = 2nH_{n-1}$ gilt. Nutzen Sie hierfür z.B. das Zwischenergebnis, Gl. (2). **(2 Pkt.)**

iii.) Die normierten Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators zu den Energieeigenwerten $E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ sind durch

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \frac{\pi^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right) e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}$$

gegeben. Hierbei bezeichnet $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega m}}$ die charakteristische Länge. Zeigen Sie die folgenden Beziehungen zwischen den Eigenfunktionen:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x_0}\varphi_n &= \sqrt{\frac{n}{2}}\varphi_{n-1} + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\varphi_{n+1} \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial(x/x_0)} &= \sqrt{\frac{n}{2}}\varphi_{n-1} - \sqrt{\frac{n+1}{2}}\varphi_{n+1} \end{aligned} \tag{3}$$

(3 Pkt.)

iv.) Warum sind die Eigenfunktionen φ_n orthogonal aufeinander? D.h.

$$\int \varphi_n^*(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x = \delta_{nm}.$$

(1 Pkt.)

Aufgabe 2: Leiteroperatoren **(6 Pkt.)**

Der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators, $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$, lässt sich mithilfe der Leiteroperatoren

$$\begin{aligned} \hat{a} &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x_0}\hat{x} + i\frac{x_0}{\hbar}\hat{p}\right) \\ \hat{a}^\dagger &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x_0}\hat{x} - i\frac{x_0}{\hbar}\hat{p}\right) \end{aligned}$$

umschreiben.

i.) Zeigen Sie, dass $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ nicht hermitesch sind. **(1 Pkt.)**

ii.) Zeigen Sie die Kommutatorrelationen

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \mathbb{1}, \qquad [\hat{n}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger, \qquad [\hat{n}, \hat{a}] = -\hat{a},$$

mit $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$. **(2 Pkt.)**

iii.) Drücken Sie $\hat{x}$ und $\hat{p}$ jeweils durch $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ aus und vergleichen Sie die Ausdrücke mit Gl. (3). Was lässt sich daraus über die Wirkung der Leiteroperatoren auf die normierten Eigenfunktionen φ_n des harmonischen Oszillators ableiten? **(2 Pkt.)**

iv.) Zeigen Sie, dass sich $\hat{H}$ als

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{\mathbb{1}}{2} \right)$$

schreiben lässt. Geben Sie mithilfe dieses Ausdrucks die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Operators $\hat{n}$ an. **(1 Pkt.)**

Münsteraufgabe

Der Vorbau an der südlichen Seite stammt erst aus der Renaissance. Wie hängt dieser Umstand mit der Reformation, der Gegenreformation und Erasmus von Rotterdam zusammen?