Theoretische Physik IV: Quantenmechanik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer)

Aufgabenzettel Nr. 9

Aufgabe 1: Drehimpuls (algebraisch) **(5 Pkt.)**

Ein Operator $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$ ist algebraisch gesehen ein Drehimpulsoperator, wenn die J_i hermitesche Operatoren sind und den Vertauschungsrelationen

$$[J_1, J_2] = iJ_3, \qquad [J_2, J_3] = iJ_1, \qquad [J_3, J_1] = iJ_2 \tag{1}$$

genügen. Allein aus diesen Vertauschungsrelationen, ohne Kenntnis des Bahndrehimpulses als Differentialoperator, lassen sich bereits die wichtigsten Kommutatoren, wie man sie z.B. zur quantenmechanischen Beschreibung des Wasserstoffatoms benötigt, ableiten.

i.) Zeigen Sie mithilfe von Gl. (1), dass $[J_i, \vec{J}^2] = 0$ für $i = 1, 2, 3$. Warum genügt es, diese Relation für $i = 1$ zu zeigen? **(2 Pkt.)**

ii.) Wir definieren die Linearkombinationen $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$. Zeigen Sie wiederum mit Gl. (1), dass

$$[J_+, J_-] = 2J_3, \qquad [J_3, J_\pm] = \pm J_\pm \tag{2}$$

gelten. **(2 Pkt.)**

Bemerkung: Gleichungen (1) und (2) sind äquivalent. Eine Drehimpulsalgebra lässt sich also auch über die Operatoren $J_3, J_\pm$ definieren, die den Vertauschungsrelationen (2) genügen.

iii.) Zeigen Sie $[\vec{J}^2, J_\pm] = 0$ und verifizieren Sie $\vec{J}^2 = J_+J_- + J_3(J_3 - 1)$. **(1 Pkt.)**

Aufgabe 2: Der Bahndrehimpuls **(5 Pkt.)**

Der quantenmechanische Operator des Bahndrehimpuls in Kugelkoordinaten lautet

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{i} \begin{pmatrix} -\cos\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi} - \sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} \\ -\sin\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi} + \cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{\partial}{\partial\phi} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Für die Komponenten $L_i/\hbar$ gelten die Relationen wie in Gl. (1), vgl. Vorlesung. Der Operator $\vec{L}$ ist also auch ein algebraischer Drehimpuls.

i.) Zeigen Sie, dass die Darstellung für $L_\pm = L_1 \pm iL_2$ in Kugelkoordinaten

$$L_\pm = \hbar e^{\pm i\phi}\left(i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi} \pm \frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

lautet. **(2 Pkt.)**

ii.) Benutzen Sie den Ausdruck aus Aufgabe 1iii.) um

$$\vec{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^2\right]$$

zu zeigen. Warum lässt sich daraus sofort ablesen, dass $[\vec{L}^2, L_3] = 0$ ist? **(3 Pkt.)**

Aufgabe 3: Rotation und Drehimpuls **(5 Pkt.)**

Die Drehung eines Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ im 3-dimensionalen Raum kann mithilfe von Drehmatrizen $R_i(\phi)$ beschrieben werden. Der um den Winkel ϕ um die i-Achse gedrehte Vektor $\vec{x}'$ ist dann durch $\vec{x}' = R_i(\phi)\vec{x}$ gegeben, wobei

$$R_1(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad R_2(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad R_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die entsprechenden Drehmatrizen sind.

i.) Der Differentialoperator

$$X_3 := \sum_{k=1}^{3} \left.\frac{\mathrm{d}(R_3(\phi)\vec{x})_k}{\mathrm{d}\phi}\right|_{\phi=0} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

heißt *infinitesimaler Erzeuger* der Rotation R_3. Zeigen Sie $X_3 = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$. Wie lauten X_1 und X_2? **(1 Pkt.)**

ii.) Zeigen Sie anhand von R_3, dass sich die Drehung auch mithilfe des infinitesimalen Erzeugers in der Form

$$\vec{x}' = R_3(\phi)\vec{x} = e^{\phi X_3}\vec{x}$$

schreiben lässt. **(2 Pkt.)**
Hinweis: Zeigen Sie, dass sich die Folge $(X_3^n\vec{x})_n$ alle 4 Glieder wiederholt und nutzen Sie die Reihendarstellungen von $\sin\phi$ und $\cos\phi$.

iii.) Die Generatoren X_k lassen sich auch mithilfe von 3×3-Matrizen angeben. Leiten Sie Matrizen J_k aus der Gleichung $X_k = -i\,(J_k \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\nabla}$ ab und zeigen Sie, dass die Matrizen J_k algebraisch einen Drehimpuls darstellen. **(2 Pkt.)**

Münsteraufgabe

Auf der Höhe der äußeren Treppe zur obersten Ausichtsebene befinden sich sieben große Figuren. Was amüsierte einen Kirchenvertreter aus Konstanz bei der Feier nach der Renovierung um 1900, bei der eine dieser Figuren durch eine Figur des Domkapitulars ersetzt worden war?