

**Skript zur Vorlesung**

**Theoretische Physik I:  
Klassische Mechanik und Spezielle  
Relativitätstheorie**

**Vorlesung SS 23**

**Prof. Dr. Jens Timmer**

**July 13, 2023**

# Contents

<b>0</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>I</b>	<b>Newtonsche Mechanik</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Grundlegende Begriffe</b>	<b>5</b>
1.1	Die Newtonschen Gesetze . . . . .	6
1.2	Wichtige Kraftgesetze . . . . .	9
1.3	Wegintegrale, Potentiale & Energiesatz . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Mehr-Körper Probleme</b>	<b>17</b>
2.1	Mehrere Punktteilchen in Wechselwirkung . . . . .	17
2.2	Zwei-Körper-Problem . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Kepler-Problem &amp; Streuung</b>	<b>29</b>
3.1	Kepler Problem . . . . .	29
3.2	Sreuung . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Lineare Schwingungen</b>	<b>43</b>
4.1	Eindimensionale Systeme . . . . .	43
4.2	Der allgemeine harmonische Fall . . . . .	49
4.3	Ein Beispiel . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Scheinkräfte</b>	<b>55</b>
<b>6</b>	<b>Für GenießerInnen</b>	<b>56</b>
6.1	Mechanische Ähnlichkeit . . . . .	56
<b>II</b>	<b>Lagrange'sche Mechanik</b>	<b>58</b>
<b>7</b>	<b>Lagrange Gleichungen 1. &amp; 2. Art</b>	<b>58</b>
7.1	Lagrange Gleichungen 1. Art . . . . .	61
7.2	Lagrange Gleichungen 2. Art . . . . .	66
<b>8</b>	<b>Anwendungen</b>	<b>72</b>
8.1	Newton revisited . . . . .	72
8.2	Lagrange 1. vs. 2. Art: Schiefe Ebene . . . . .	73
8.3	Das sphärische Pendel . . . . .	75
8.4	Foucault'sches Pendel . . . . .	78
<b>9</b>	<b>Der starre Körper</b>	<b>81</b>
9.1	Kinematik . . . . .	81
9.2	Kinetische Energie & Trägheitstensoren . . . . .	84
9.3	Drehimpuls, Eulersche Kreiselgleichungen, freier symmetrischer Kreisel	87
9.4	Bewegungsgleichungen für Eulersche Winkel . . . . .	89
9.5	Der schwere Kreisel . . . . .	89

<b>10 Für GenießerInnen</b>	<b>93</b>
10.1 Noethersches Theorem . . . . .	93
10.2 Das Hamilton'sche Prinzip . . . . .	97
10.3 Mechanische Ähnlichkeit revisited . . . . .	101
10.4 Kanonisch konjugierter Impuls im magnetischen Falle . . . . .	102
10.5 Uneindeutigkeit der Lagrange-Funktion . . . . .	103
<b>III Hamilton'sche Mechanik</b>	<b>104</b>
<b>11 Grundlagen</b>	<b>104</b>
11.1 Von Lagrange zu Hamilton . . . . .	104
11.2 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen . . . . .	107
11.3 Theorem von Liouville . . . . .	111
11.4 Poissonklammern . . . . .	112
<b>12 Für GenießerInnen</b>	<b>113</b>
12.1 Hamiltonsche Gleichungen aus Variationsprinzip . . . . .	113
<b>IV Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>115</b>
<b>13 Raum und Zeit</b>	<b>115</b>
13.1 Relativitätsprinzip . . . . .	115
13.2 Lorentz-Transformation . . . . .	117
13.3 Längenkontraktion und Zeitdilatation . . . . .	120
<b>14 Relativistische Mechanik</b>	<b>125</b>
14.1 Vier-dimensionale Entfernung . . . . .	125
14.2 Relativistische Dynamik . . . . .	127

# 0 Einleitung

Orga-Krams:

- Übungen: Alle Fragen an Herrn Rosenblatt  
Viele Stunden darauf verwenden. Nicht versuchen, sie mit Google oder Chat-GPT zu lösen. Wird zu Katastrophe führen.  
Abgeben in 2er-Gruppen.  
Übungen zum Vertiefen, Übungen für ausgelassenen Stoff  
Umgehend den Übungen in HISinOne beitreten
- Münsteraufgaben, Münsterführung 20.7. 12:15 Uhr, Klausur Do. 2.8. 14:15 Uhr, GHS
- Scheinkriterium: 50 % der Aufgaben, Bestehen der Klausur
- Inhaltsverzeichnis
- Ausführliches Skript nur Klassische Mechanik auf Vorlesungs-Homepage
- Das Skript ist dünn, lesen Sie parallel ein Buch
- Bemerkung Vektorpfeile und Nomenklatur
- Fragen bei Unklarheiten !

Literatur:

- J. Honerkamp, H. Römer: Klassische Theoretische Physik  
Online: [http://www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/82/pdf/82\\_1.pdf](http://www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/82/pdf/82_1.pdf)
- F. Kuypers: Klassische Mechanik
- F. Scheck: Theoretische Physik 1. Mechanik
- H. Goldstein: Klassische Mechanik, formaler
- V.I. Arnol'd: Mathematical Methods of Classical Mechanics, formaler

Klassische Mechanik ist grundlegend für

- gesamte Physik
  - Formaler Rahmen der Elektrodynamik
  - Grundlage und Unterschied Quantenmechanik
  - Unterschied zu Spezieller und Allgemeiner Relativitätstheorie
- Technik: Maschinen- und Brückenbau

# Part I

# Newtonsche Mechanik

## 1 Grundlegende Begriffe

### Raum und Zeit in der Klassischen Mechanik

Zeit:

- $t \in \mathbb{R}$ , weltweit identisch
- Weltweite Messung durch Transport von Eichuhren  
Messung Abstand Sonne/Erde durch Venus-Durchgang, 1769
- Das ändert sich in der speziellen Relativitätstheorie

Raum:

- Affiner Raum
  - Menge  $A$  von Punkten  $P, Q, R$
  - Vektorraum  $V^3$  mit Vektoren  $\vec{x}, \vec{y}$
- Es gelte:  
Geordnetem Punktepaar  $(P, Q)$  ist Vektor  $\vec{x} = \vec{PQ}$  aus  $V^3$  zugeordnet  
Für jeden Punkt  $P$  und zu jedem  $\vec{x}$  gibt es einen Punkt  $Q$ , so dass  $\vec{PQ} = \vec{x}$  gilt  
Für drei Punkte  $P, Q, R$  gilt:

$$\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$$

- Wähle Ursprung  $O$   
Wähle Basis  $(\vec{e}_i), i = 1, 2, 3$   
Dann

$$\vec{OP} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i$$

Dann  $x_i$  Koordinaten bezüglich Koordinatensystem  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

- Gegeben Koordinatensystem. Dann  
Ortsvektor:

$$\vec{r}(t) = \sum x_i(t) \vec{e}_i$$

Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}$$

Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \ddot{\vec{r}}$$

- Beispiel:

Geradlinig-gleichförmige Bewegung

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0$$

$$\vec{a}(t) = 0$$

Die Unabhängigkeit von Raum & Zeit wird sich in der Relativitätstheorie ändern.

## 1.1 Die Newtonschen Gesetze

Newton:

- \* 1643, † 1727
- Hauptwerk: 1686: "Philosophiae naturalis principia mathematica"

Die Newtonschen Gesetze

1. Wirken keine Kräfte, verharrt ein Körper in Ruhe oder im Zustand geradlinig-gleichförmiger Bewegung.
2. Eine Kraft  $\vec{F}$  bewirkt eine Beschleunigung

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

3. "actio gleich reactio"

Sei  $\vec{F}_{ij}$  die Kraft, die Körper  $j$  auf Körper  $i$  ausübt, so gilt:

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$$

Kommentare:

- Still acute:

PRL 98, 150801 (2007)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending  
13 APRIL 2007

### Laboratory Test of Newton's Second Law for Small Accelerations

J. H. Gundlach, S. Schlamminger, C. D. Spitzer, and K.-Y. Choi

*Center for Experimental Nuclear Physics and Astrophysics, University of Washington, Seattle, Washington 98195, USA*

B. A. Woodahl

*Physics Department, Indiana University-Purdue University, Indianapolis, Indiana 46202, USA*

J. J. Coy

*Earth and Space Science Department, Saint Joseph's College, Rensselaer, Indiana 47978, USA*

E. Fischbach

*Physics Department, Purdue University, West Lafayette, Indiana 47907, USA*

(Received 12 February 2007; published 13 April 2007)

We have tested the proportionality of force and acceleration in Newton's second law,  $F = ma$ , in the limit of small forces and accelerations. Our tests reach well below the acceleration scales relevant to understanding several current astrophysical puzzles such as the flatness of galactic rotation curves, the Pioneer anomaly, and the Hubble acceleration. We find good agreement with Newton's second law at accelerations as small as  $5 \times 10^{-14} \text{ m/s}^2$ .

DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.150801

PACS numbers: 06.30.Gv, 04.80.Cc

Newton's second law is the equation of motion defining the field of dynamics. In its nonrelativistic form,  $\vec{F} = m\vec{a}$  is perhaps the most famous and most often used equation of physics. Together with its relativistic and quantum mechanical variants, this law is implicitly tested in many applications and experiments, and its validity is simply assumed at all acceleration scales. Any deviation from  $\vec{F} = m\vec{a}$  would have profound consequences as it would

standard Newtonian dynamics. The functional form of the transition between the two regimes is not specified. A smooth transition can be obtained by multiplying the right side of  $\vec{F} = m\vec{a}$  by  $\mu(a/a_0) = a/a_0(1 + a^2/a_0^2)^{-1/2}$ , so that for  $a \gg a_0$  the function  $\mu \approx 1$  and standard Newtonian mechanics is recovered. The characteristic acceleration  $a_0$  was determined from fits [4] to galactic rotation curves to be  $a_0 \approx 1.2 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$ .

- 1. NG widerspricht all unserer Erfahrung, aber ordnet sie am Ende sinnig
  - Erstes Newtonsche Gesetz definiert "Nullelement" in der Menge der Kräfte, die "Nullelement" in der Menge der Bewegung nach sich zieht.
  - 1. Newtonsche Gesetz postuliert Trägheitsprinzip
  - 1. Gesetz macht nur Sinn bei Angabe von Bezugssystem
    - \* Es kann nicht in allen gelten:  
Gilt es in System  $S$ , kann es in relativ beschleunigtem System  $S'$  nicht gelten:  
Körper erfährt dort Beschleunigung, obwohl keine Kraft auf ihn wirkt.
    - \* Bezugssystem, in dem 1. Newtonsches Gesetz gilt heißt Inertialsystem
      - Existenz vor der Hand unklar.
      - Für einzelne Körper existiert Koordinatentransformation, so dass Bahnkurve  $r(t)$  gradlinig-gleichförmig, muss aber für alle Körper gelten.
      - Koordinatensystem relativ zum Fixsternhimmel ist in guter Näherung Inertialsystem
      - Einziges perfektes Inertialsystem: Der leere Kosmos
      - Koordinatensystem mit Bezugspunkt auf Erdoberfläche ist weniger gut:
        - Rotation der Erde um Sonne
        - Rotation der Erde um sich selbst
    - \* Auswirkungen der Abweichung von Inertialsystem werden in Kapitel 5 behandelt.
- Relativitätsprinzip:
  - Sei in  $S$  Bahnkurve  $\vec{r}(t)$
  - Sei  $S'$  um  $\vec{r}_0$  gegen  $S$  verschoben und bewege sich mit  $\vec{v}_0$
  - Dann gilt die Galileo-Transformation:
 
$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$
  - Relativitätsprinzip: Alle Inertialsysteme sind physikalisch gleichwertig
  - Die Gesetze der Klassischen Mechanik müssen invariant unter der Galileo-Transformation sein.
  - Bemerkung zur E-Dynamik
- 2. NG:
 

Jede Abweichung vom Nullelement der Kräfte führt zu Beschleunigungen

  - "Suchet die Kräfte": Ein komplettes Forschungsprogramm
  - Sind alle Kräfte  $\vec{F}_i$  bekannt, ergibt  $m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$  die Dynamik, da Kräfte Vektoren sind.
    - \*  $m$ : träge Masse, im Unterschied zur schweren Masse, siehe später.  
Ausgangspunkt Allgemeine Relativitätstheorie

\* Kräfte addieren sich wie Vektoren (Kräfteparallelogramm)

– Ontologie:

\*  $\vec{F}_i$ : Ursachen

\*  $m\vec{a}$ : Wirkung

• Merke:

Die Newtonschen Gesetze stellen eine immense Abstraktionsleistung dar

### Historische Anmerkung: Aristotelische Mechanik

”Alle Dinge haben ihren Platz, den sie ihrer Natur gemäß einzunehmen bestrebt sind”

Zweigeteilte Welt:

• Auf der Erde:

– ”Natürliche Bewegung”, schwere Körper nach unten, leichte nach oben

– ”Erzwungene Bewegung”  $mv = F$ , setzt direkten Kontakt voraus

• Gestirne: Bewegung nach ”ewiger Harmonie”: Gleichförmige Kreisbewegung, ”Unbewegter Beweger”

Kritik zu seiner Zeit

• Sternschnuppen

• Speerwurf

• Kein Grund, überheblich zu sein, Newton hat auch seine Grenzen

Newton vereinheitlicht zwei vorher getrennte Bereiche. Seine Theorie gilt für

• Bewegung der Planeten

• den fallenden Apfel

Vereinheitlichung als Ansatz hat sich als bewährt

• Elektromagnetismus

• EM, schwache & starke Kraft

• Vereinheitlichung (EM, schwache & starke Kraft) mit Gravitation aktuelles Forschungsgebiet

1 23

### Praxis der Newtonschen Mechanik

•  $\vec{r}(t)$  aus  $m\vec{a}(t) = \vec{F}(t)$  berechenbar, wenn

–  $\vec{F}(t)$  bekannt

–  $\vec{r}(0), \vec{v}(0)$  bekannt

• Im allgemeinen kann  $\vec{F}(t)$  beliebig kompliziert sein, z.B. von Vorgeschichte abhängen.

- Häufig:  $F(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$

Dann

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$$

die Bewegungsgleichung, eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung

- Manchmal nicht zu lösen  $\implies$  Lagrange & Hamilton
- Gilt sogar  $\vec{F}(\vec{r}(t))$ , so handelt es sich um ein Kraftfeld:  $\vec{F} : V^3 \rightarrow V^3$ , denke an Gravitationsfeld.

### Den Spieß umdrehen

Kennt man die verursachende Kraft nicht, aber die Bahnkurve  $\vec{r}(t)$ , lässt sich die Kraft ermitteln.

So geschehen durch Newton für die Gravitationskraft.

## 1.2 Wichtige Kraftgesetze

Der allgemeine Fall  $\vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$ , abhängig von

- Ort
- Geschwindigkeit, denke an Lorentz-Kraft
- Zeit

Beispiele:

- (i.)  $\vec{F} = \vec{F}_0 = \vec{const}$

Oft gute Näherung in kleinen Raumzeitbereichen.

Beispiel: Gravitationsfeld der Erde  $\vec{F} = m\vec{g}$ ,  $m$  schwere Masse,  $\vec{g} = 9.81m/s^2$

Experimentell bestens bestätigt: schwere Masse = träge Masse.

Ausgangspunkt der Allgemeinen Relativitätstheorie

Lösung von

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_0$$

durch zweimalige Integration mit Anfangswerten  $\vec{v}_0$  und  $\vec{r}_0$

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2m}\vec{F}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

- (ii.) Harmonisches Kraftgesetz

Lineare, zeitunabhängige Kraft:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -D\vec{r}$$

Gilt für Federpendel bei kleiner Auslenkung

Bewegungsgleichung

$$m\ddot{r} = -Dr$$

Allgemeine Lösung

$$r(t) = a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Pendel, Zeichnung

Mit

$$F_{tan} = -mg \sin \varphi$$

folgt

$$ma_{tan} = F_{tan}$$

Winkelbeschleunigung:  $a_{tan} = l\ddot{\varphi}$  ergibt

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi$$

Taylorentwicklung 1. Ordnung

$$m\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \varphi$$

Höhere Ordnung Taylorentwicklung: Störungstheorie

Wird Reibung mit  $-k\dot{r}$  und zeitabhängige äußere Kraft  $F(t)$  hinzugefügt, ergibt sich

$$m\ddot{r} + k\dot{r} + Dr = F(t)$$

eine erzwungene Schwingung mit Resonanzphänomenen, die in Kapitel 4 behandelt werden.

(iii.) Gravitationskraft

Newton's grosser Verdienst

Kraft von Masse  $m_2$  auf  $m_1$

$$\vec{F}_{G12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}, \quad \vec{r} = P_1 \vec{P}_2, \quad \gamma = 6.674 \times 10^{-11} m^3 / (kg s^2)$$

(iv.) Lorentz-Kraft: geschwindigkeitsabhängig

Elektrisches Feld  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , Magnetfeld  $\vec{B}(\vec{r}, t)$

$$\vec{F}_L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = e(\vec{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t))$$

(v.) Coulomb-Kraft

Ladungen  $q_1, q_2$

$$\vec{F}_{C12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}, \quad \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

Betrachte 2 Protonen:

- Anziehung auf Grund der Gravitation
- Abstossung auf Grund von Coulomb

Abstossung  $\sim 10^{36}$  mal stärker als Anziehung: Gravitation auf kleinen Skalen i.d.R. vernachlässigbar

Betrachte Universum:

- Recht homogen gilt: Anzahl negativer Ladungen = Anzahl positiver Ladungen  
Coulomb mittelt sich raus
- Gravitation immer anziehend: Spielt auf großen Skalen den Haupteffekt

(vi) Reibungs-Kräfte

- Gleitreibung fester Körper

$$\vec{F}_R = -\mu |F_N| \frac{\vec{v}}{v}, \quad F_N \text{ die Normalkraft}$$

- Reynoldszahl

$$Re := \frac{\rho v d}{\eta}$$

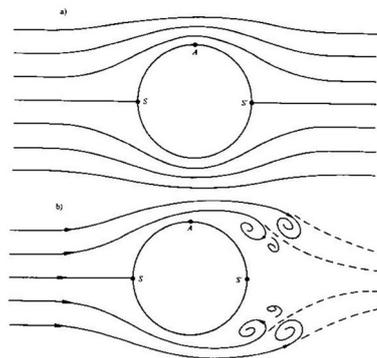
$\rho$ : Dichte,  $v$ : Geschwindigkeit,  $d$ : Charakteristische Länge,  $\eta$ : Viskosität

- Für viskose, Stokes'sche Reibung, kleine Reynoldszahl<sup>1</sup>, laminare Strömung

$$\vec{F}_R = -\kappa \vec{v}$$

- Bei "Luftreibung", große Reynoldszahl, turbulente Strömung

$$\vec{F}_R = -\frac{1}{2} c_w \rho A v^2 \frac{\vec{v}}{v}$$



Wichtig für im Windschatten fahren

1. Di. 20

<sup>1</sup>Sehr empfohlenes paper: E.M. Purcell. Life at low Reynolds number. American Journal of Physics 45, 3 (1977)

### 1.3 Wegintegrale, Potentiale & Energiesatz

Erinnere Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x(t)) \frac{dx}{dt} dt = \int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx$$

- Physiker-lax:  $dt$  kürzen und Grenzen anpassen
- Beachte: Kann man in beide Richtungen lesen.

Betrachte Massenpunkt in zeitunabhängigem Kraftfeld.  
Bewegungsgleichung, Vektorpfeile weggelassen:

$$m\ddot{r}(t) = F(r(t))$$

Multipliziere mit  $\dot{r}$  und integriere über  $t$  von  $t_1$  bis  $t_2$

- LHS:

$$m \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{r} \ddot{r} = \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} (\dot{r}^2) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \Big|_{t_1}^{t_2} = T(t_2) - T(t_1)$$

mit  $T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$  kinetische Energie

- RHS:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt F(r(t)) \frac{dr(t)}{dt}$$

Sei  $r_1 = r(t_1)$ ,  $r_2 = r(t_2)$  und  $C$  Bahn zwischen  $r_1$  und  $r_2$ , so gilt

$$\int_{t_1}^{t_2} dt F(r(t)) \frac{dr(t)}{dt} = \int_{r_1, C}^{r_2} F(r) dr$$

- LHS & RHS:

$$\int_{r_1, C}^{r_2} F(r) dr = T(t_2) - T(t_1) \tag{1}$$

$$\int_{r_1, C}^{r_2} F(r) dr = A_{12}(r_1, r_2, C, F) = A_{12}(C)$$

stellt ein Wegintegral dar.

- Wegintegral hängt von der Bahn  $C$  ab, nicht von der Bahnkurve  $\vec{r}(t)$ .

Betrachte  $\tau$  mit  $t = t(\tau)$

$$\int_{\tau(t_1)}^{\tau(t_2)} F(r(t(\tau))) \frac{dr(t(\tau))}{d\tau} d\tau = \int_{\tau(t_1)}^{\tau(t_2)} F(r(t(\tau))) \frac{dr(t(\tau))}{dt} \frac{dt}{d\tau} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} F(r(t)) \frac{dr(t)}{dt} dt$$

Eigenschaften von Vektorfeldern

- Vektorfeld heißt konservativ, wenn das Wegintegral in einem einfach zusammenhängenden Gebiet

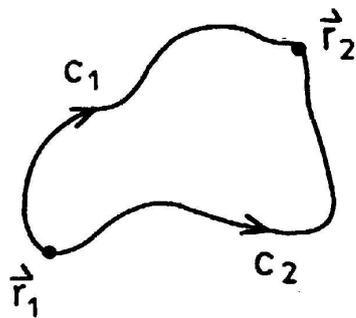
$$\int_{r_1, C}^{r_2} F(r) dr = A_{12}(r_1, r_2, C, F)$$

unabhängig von  $C$  ist.

Einfach zusammenhängend: Jeder geschlossene Weg lässt sich kontinuierlich auf einen Punkt zusammenziehen.

- Vektorfeld  $F(r)$  ist genau dann konservativ, wenn Wegintegral in einem einfach zusammenhängenden Gebiet über jeden geschlossenen Weg verschwindet.

– Ist  $F(r)$  konservativ, so gilt



Zwei Wege von  $r_1$  nach  $r_2$

$$\int_{r_1, C_1}^{r_2} F(r) dr = \int_{r_1, C_2}^{r_2} F(r) dr = - \int_{r_2, -C_2}^{r_1} F(r) dr$$

ergo

$$\int_{C_1 \cup -C_2} F(r) dr = 0$$

– Verschwindet Integral, drehe obiges Argument  $\forall$  geschlossenen Wege, auf denen  $r_1, r_2$  liegen, um.

- Vektorfeld ist genau dann konservativ, wenn es ein skalares Feld  $U(r)$  gibt mit:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}\right)$$

Beweis als Übung

Dieses skalare Feld  $U$  heißt Potential, Minuszeichen Konvention.

- Ist  $F$  konservativ, so gilt:

$$\nabla \times F = 0$$

$$\nabla \times F = \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_k}{\partial x_j}$$

Einstein'sche Summenkonvention: über identische Indices wird summiert.

Wenn  $F_k = -\frac{\partial U}{\partial x_k}$  gilt, dann

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial U}{\partial x_j \partial x_k} = 0$$

- Gilt

$$\nabla \times F \neq 0$$

so ist  $F$  nicht konservativ.

- Final: Gilt in einfach zusammenhängendem Gebiet

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

so existiert  $U$  mit

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

## Der Energiesatz

Erinnere Wegintegral, betrachte konservatives Kraftfeld

$$F(r) = -\nabla U(r), \quad \int_{r_1}^{r_2} dr F(r) = U(r_1) - U(r_2)$$

Somit mit Gl. (1)

$$T(\dot{r}(t_2)) + U(r(t_2)) = T(\dot{r}(t_1)) + U(r(t_1))$$

Ergo: Die Größe

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2(t) + U(r(t))$$

ist für konservative Kraftfelder eine Erhaltungsgröße.

- $E$ : Energie
- $T$ : Kinetische Energie
- $U$ : Potentielle Energie

Allgemein ist

$$A = \int_{r_1, C}^{r_2} F(r) dr$$

die von Kraft  $F$  am Körper geleistete Arbeit.

Beispiele: (nicht) konservative Kraftfelder, Systeme mit Reibung wg. Trivialität nicht dabei

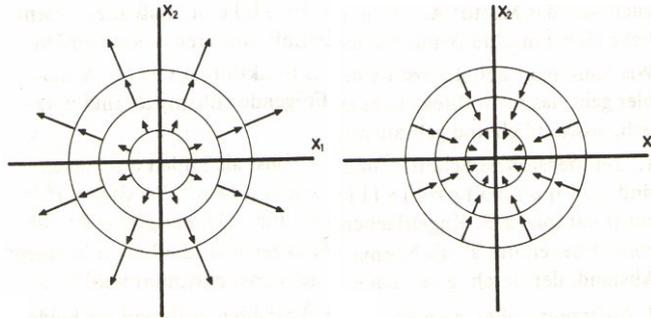
- Gravitationskraft

$$U(r) = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r}$$

- Zentralkraftfelder

– rotationssymmetrisch:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}/r$$



konservativ

– Allgemeiner Fall

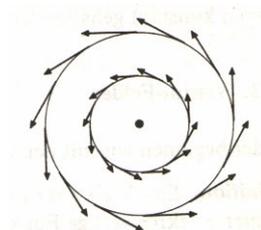
$$\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r})\vec{r}/r$$

nicht konservativ

- Harmonische Kraft

$$U(r) = \frac{D}{2}r^2$$

- Nichtkonservatives Feld:



$$F = (y, -x, 0), \quad \nabla \times F = (0, 0, -2)$$

- Besonders schön:

$$F = \frac{1}{x^2 + y^2} (y, -x, 0) \text{ auf } \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, z)$$

siehe Übung

- Eindimensionale Dynamik

$F(x)$  ist immer konservativ. Grund: es existiert immer  $U(x)$  mit

$$F(x) = -\frac{d}{dx}U(x)$$

nämlich die Stammfunktion von  $-F(x)$ .

Bewegungsgleichung direkt lösbar

– Da Kraftfeld konservativ, nutze Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E = \text{const}$$

Damit:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2/m(E - U(x(t)))}$$

Dieses heißt “Erstes Intregral”, weil von  $\ddot{x}$  zu  $\dot{x}$   
Trennung der Variablen

$$\frac{dx}{\sqrt{2/m(E - U(x(t)))}} = dt$$

”Erweitere” LHS mit  $\frac{dt'}{dt}$

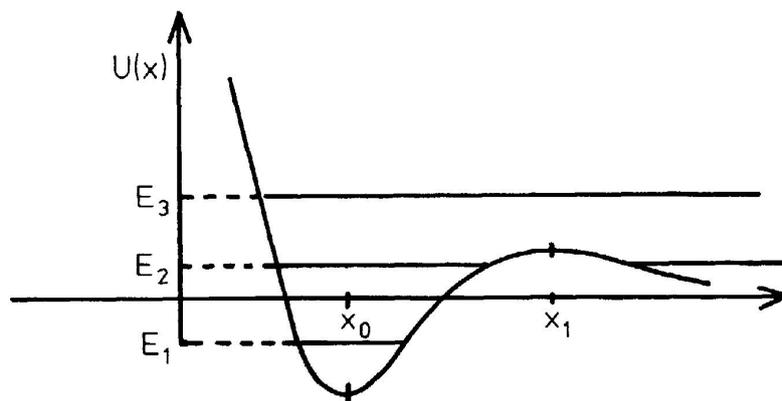
Integriere

$$\int_{t_0}^t \frac{\dot{x} dt'}{\sqrt{2/m(E - U(x(t')))}} = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{2/m(E - U(x'))}} = \int_{t_0}^t dt' = t - t_0$$

– Ergibt die Lösung:

$$x = x(t; E, x_0)$$

– Da  $T \geq 0$  folgt  $E = T + U \geq U$



**Ein Beispiel einer Potentialfunktion für eine eindimensionale Bewegung mit den erlaubten Aufenthaltsbereichen für verschiedene Energien**

Lessons learned:

- Newtonsche Gesetze: Immense Abstraktionsleistung
- Forschungsprogramm: Suchet die Kräfte
- Newtonsche Gesetze bilden selbstkonsistenten Rahmen der Mechanik
- Konservative Kraftfelder haben Potential
- In konservativen Kraftfeldern gilt Energieerhaltung

## 2 Mehr-Körper Probleme

### 2.1 Mehrere Partikel in Wechselwirkung

- Betrachte  $N$  Massenpunkte

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) = \vec{F}_i(t)$$

- Sei  $\vec{F}_i(t)$  von der Form

$$\vec{F}_i(t) = \vec{F}_i(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t))$$

dann ist

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) = \vec{F}_i(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t))$$

ein System von  $3N$  DGLs 2. Ordnung.

- Analog zu oben ergibt sich die kinetische Gesamtenergie zu

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2(t)$$

- Kräfte aus Potential ?

Betrachte  $3N$  dimensionalen Vektorraum

$$\begin{aligned} Z &= V^3 \oplus \dots \oplus V^3 \\ Z &= \{ \underline{z} = (\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t)) \} \end{aligned}$$

- $Z = V^{3N}$  heißt Konfigurationsraum oder Ortsraum
- Bahnkurve:  $t \mapsto \underline{z}$
- Kraftfeld:  $E^{3N} \mapsto V^{3N}$

- Analog zu oben:

- Kraftfeld ist konservativ, wenn

$$\int_{\underline{z}_1, C}^{\underline{z}_2} \underline{F} d\underline{z}$$

unabhängig vom Weg ist.

- $\underline{F}(\underline{z})$  genau dann konservativ, wenn Potential  $U(\underline{z})$  existiert, mit

$$\underline{F} = -\underline{\nabla}U$$

- Ist Kraftfeld konservativ, ist die Gesamtenergie:

$$E = T(t) + U(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t))$$

erhalten.

### Beispiel: Zwei-Körper-Problem

- Betrachte zwei Massenpunkte an  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$   
Kraft hänge ab vom Abstandsbetrag  $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = r$   
Richtung der Kraft in Verbindungslinie
- Dann gilt mit  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -f(r) \frac{\vec{r}}{r} \\m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = f(r) \frac{\vec{r}}{r}\end{aligned}$$

$\vec{F}_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\vec{F}_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  folgt aus drittem Newtonsches Gesetz.

- $(F_1, F_2)$  ist ein konservatives Kraftfeld.  
Übung

In der Regel gilt, wenn das System nicht auf die äußeren Kräfte zurück wirkt:

$$\vec{F}_i(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t)) = \vec{F}_i^a(\vec{r}_i(t)) + \sum_{i \neq j}^N \vec{F}_{ij}^{in}(\vec{r}_i(t), \vec{r}_j(t))$$

mit

- $\vec{F}_i^a$  : äußere Kraft
- $\vec{F}_{ij}^{in}$  : innere Kräfte

3 23

### Impuls

- Wichtige Grösse:

$$\vec{p}_i(t) := m \dot{\vec{r}}_i(t)$$

$N$  Teilchen Gesamtimpuls:

$$\vec{P} := \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

- Ortsvektor  $\vec{R}$  des Schwerpunktes definiert durch:

$$\vec{R} := \sum m_i \vec{r}_i / \sum m_i$$

Dann

$$\vec{P} = M \dot{\vec{R}}, \quad M = \sum m_i$$

Merke:

$\vec{P}$  ist Impuls des Systems der  $N$  Massepunkte, im Schwerpunkt zusammengefaßt.

- 2. Newtonsche Gesetz

$$\dot{\vec{p}}_i(t) = \vec{F}_i(t)$$

Allgemeinere Formulierung, die auch Masseänderungen berücksichtigt, z.B. Rakete, die Treibstoff verbrennt.

- Gelten Bewegungsgleichungen der Form, ab jetzt im wesentlichen ohne Vektorpfeile:

$$\dot{p}_i = F_i^a + \sum_{i \neq j} F_{ij}^{in}$$

so gilt wegen  $F_{ij} = -F_{ji}$

$$\sum_i \dot{p}_i = \dot{P} = \sum F_i^a$$

Merke: "Änderung des Gesamtimpulses ist gleich Summe der äußeren Kräfte"

- Falls  $\sum F_i^a = 0$ , gilt

$$\dot{P} = M\ddot{R} = 0$$

- Gesamtimpuls ist erhaltene Größe
- Schwerpunkt bewegt sich geradlinig-gleichförmig

- Gilt ferner

$$F_i^a = 0$$

heißt das System abgeschlossen

Beispiel: Zwei-Körper-Problem revisited

- Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= F_1(r_1, r_2) = -f(r) \frac{\vec{r}}{r} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= F_2(r_1, r_2) = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned}$$

Abgeschlossenes System

- Addition der Gleichungen:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = M\ddot{R} = 0$$

Lösung der Bewegungsgleichung für Schwerpunkt:

$$R(t) = R_0 + V_0 t$$

Damit 3 der 6 DGLs gelöst

- Für die restlichen, Subtraktion, so daß Bewegungsgleichung für Relativbewegung  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  entsteht.

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \left( -\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) f(r) \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{1}{\mu} f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

mit der reduzierten Masse

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

- Bewegungsgleichung der Relativbewegung:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

Struktur

- Kraftzentrum im Ursprung, dem Schwerpunkt
- EIN Teilchen mit Masse  $\mu$

- Energiezerlegung:

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 + U(r) = E_s + E_{rel} + U(r) = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \left( \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U(r) \right)$$

- Merke:

Statt  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  betrachte  $(\vec{R}, \vec{r})$

- Liegen äußere Kräfte vor, gelingt die Aufspaltung in Schwerpunkts- und Relativbewegung in der Regel nicht, weil sich die potentielle Energie nicht additiv verhält.

## Drehimpuls

- Sei  $\vec{r}$  Ortsvektor bezogen auf Ursprung  $O$

Dann ist Drehimpuls  $\vec{L}(t)$  bezüglich Ursprung  $O$ :

$$\vec{L}(t) := \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = m \vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)$$

- Zeitableitung:

$$\dot{\vec{L}}(t) := m \dot{\vec{r}}(t) \times \dot{\vec{r}}(t) + m \vec{r}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{r}(t) \times m \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}(t) =: \vec{N}(t)$$

$\vec{N}(t)$  heißt Drehmoment der Kraft  $\vec{F}$  bezüglich Ursprung  $O$ .

- Eigenschaften:

- Drehmoment ändert Drehimpuls so wie Kraft Impuls verändert
- Drehimpuls erhalten, wenn  $\vec{N}(t) = 0$

- Das ist z.B. der Fall, wenn  $\vec{F}(r)$  parallel zu  $\vec{r}(t)$ , i.e. Zentralkraftfeld
- Zentralkraftfeld braucht weder rotationssymmetrisch noch zeitunabhängig zu sein. Erinnerung, das war bei Konservativität anders

### **$N$ Teilchen Fall**

- Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{L}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i(t)$$

Zeitliche Veränderung:

$$\dot{\vec{L}}(t) = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{L}}_i(t) = \sum \vec{r}_i(t) \times m_i \ddot{\vec{r}}_i(t)$$

- Mit

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) = F_i^a(\vec{r}_i) + \sum_{i \neq j} F_{ij}^{in}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

folgt

$$\dot{\vec{L}}(t) = \sum \vec{r}_i \times F_i^a(\vec{r}_i) + \sum_{i \neq j} \vec{r}_i \times F_{ij}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

2. Term:

$$\sum_{i \neq j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}$$

da  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

- Ist nun  $F_{ij}$  parallel zu  $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ , so verschwindet 2. Term und es gilt:

$$\dot{\vec{L}}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i(t) \times F_i^a = N^a$$

- Dann Änderung des Gesamtdrehimpulses allein durch äußere Kräfte gegeben.  
Abgeschlossenes System: Gesamtdrehimpuls ist erhaltene Größe

### **Schwerpunkts- und Relativzerlegung**

Sei  $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{x}_i$ ,  $x_i$ : Koordinate bezüglich Schwerpunkt

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum m_i r_i \times \dot{r}_i = \sum m_i (R + x_i) \times (\dot{R} + \dot{x}_i) \\ &= R \times P + \sum m_i x_i \times \dot{R} + R \times \sum m_i \dot{x}_i + \sum m_i x_i \times \dot{x}_i \end{aligned}$$

Da  $\sum m_i x_i = 0$

$$L = L_S + L_{rel} = R \times P + \sum m_i x_i \times \dot{x}_i$$

Analog für Drehmoment:

$$N = \sum r_i \times F_i^a = \sum (R + x_i) \times F_i^a = \sum R \times F_i^a + \sum x_i \times F_i^a = N_S + N_{rel}$$

$$\dot{L}_S = \dot{R} \times P + R \times \dot{P} = M \dot{R} \times \dot{R} + R \times \dot{P} = R \times \dot{P} = \sum R \times F_i^a = N_S$$

Wegen  $\dot{L} = N$ , auch  $\dot{L}_{rel} = N_{rel}$

Merke:

Abgeschlossenes System:  $L$ ,  $L_{rel}$  und  $L_S$  sind erhalten

**Betrachte Zwei Körper-Problem:**

$$L_{rel} = m_1 \vec{x}_1 \times \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \vec{x}_2 \times \dot{\vec{x}}_2$$

Wegen

$$\vec{x}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{r}, \quad \vec{x}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{r}, \quad M = m_1 + m_2, \quad \vec{r} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$$

folgt:

$$L_{rel} = \left( \frac{m_1 m_2^2}{M^2} + \frac{m_1^2 m_2}{M^2} \right) r \times \dot{r} = \mu r \times \dot{r}, \quad \text{erinnere } \mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

wie erwartet:  $L_{rel}$  eines Teilchens mit Masse  $\mu$ .

## 2.2 Zwei-Körper-Problem

Motiviert aus Kepler-Problem, i.e. Sonne-Erde System mit Gravitationskraft  $\propto 1/r^2$  (wie sich herausstellte)

- Tycho Brahe \*1546, †1601  
Umfangreiche Beobachtungsstudien der Planetenbahnen
- Kepler \*1571, †1630 (Assistent von Tycho Brahe, soll ihn vergiftet haben)  
Die Kepler'schen Gesetze, empirisch daraus abgeleitet
  1. Planeten bewegen sich auf Ellipsen.
  2. Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen
  3.  $T^2/R^3 = const$ ,  $T$  Umlaufzeit,  $R$  große Halbachse
- Newton erlaubt Herleitung/Verständnis der Keplerschen Gesetze

Analogie experimentelle Atomphysik/Quantenmechanik, Balmer-Serie et al.

Betrachte abgeschlossenes Zwei-Körper-System mit rotationssymmetrischem Zentralkraftfeld

Was bisher geschah (für die Relativbewegung):

- Bewegungsgleichung:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

- Energie

$$E_{rel} = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + U(r)$$

- Drehimpuls:

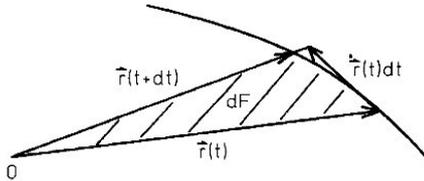
$$\vec{L}_{rel} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

Abgeschlossen:

$$\vec{L}_{rel} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{const}$$

Folgerungen:

- $\vec{L}_{rel}$  ist zeitlich konstant. Lege  $\vec{L}_{rel}$  in  $z$ -Richtung  
Folge:  $\vec{r}$  und  $\dot{\vec{r}}$  liegen in  $xy$ -Ebene
- Betrachte Fläche  $dF$ , die  $r$  in Zeitintervall  $dt$  überstreicht



$$dF = \frac{1}{2} |r| |\dot{r} dt| \sin(r, \dot{r} dt) = \frac{1}{2} |r \times \dot{r}| dt$$

Damit:

$$dF = \frac{1}{2\mu} |L_{rel}| dt$$

- Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
- 2. Kepler Gesetz ist Folge der Drehimpulserhaltung
- Gilt für alle Zentralkraftfelder, z.B. auch für harmonische Kraft  $\vec{F}(\vec{r}) = -D\vec{r}$
- Geschwindigkeit auf exzentrischer Bahn

Berechnung der Bahnkurve

- Polarkoordinaten in  $xy$ -Ebene

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (2)$$

- Mit  $\vec{L}_{rel} = (0, 0, l)$

$$\begin{aligned}
 l &= \mu (x\dot{y} - y\dot{x}) \\
 &= \mu r \cos \varphi (\dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi) \\
 &\quad - \mu r \sin \varphi (\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi) \\
 &= \mu r^2 \dot{\varphi}
 \end{aligned}$$

also:

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2} \quad (3)$$

- Mit Gl. (2) folgt für kinetische Energie der Relativbewegung:

$$\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad \text{Unterschied } \dot{\vec{r}}, \dot{r} \text{ klarmachen}$$

- Für Gesamtenergie  $E = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + U(r)$

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

mit

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

$\frac{l^2}{2\mu r^2}$  in  $U_{eff}$  heißt Zentrifugalterm oder (besser) Zentrifugalbarriere.

4 23

- Wir haben nun eindimensionales Problem, siehe Ende Kapitel 1.3, und erhalten "Erstes Integral":

$$\dot{r} = \pm \sqrt{2/\mu(E - U_{eff}(r))}$$

Erstes Integral weil von  $\ddot{r}$  nach  $\dot{r}$

Trennung der Variablen und Integration

$$\pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{2/\mu(E - U_{eff}(r'))}} = \int_{t_0}^t dt' = t - t_0$$

Ergibt:

$$r(t) = r(t; E, l^2, r_0)$$

$\varphi(t)$  aus Gl. (3)

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{l}{\mu r^2(t)}$$

$$\varphi(t) - \varphi_0 = \int_{t_0}^t dt' \frac{l}{\mu r^2(t')}$$

Beachte:

- Wegen  $\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}$  kann  $\dot{\varphi}$  Vorzeichen nicht wechseln, i.e Drehung immer in die selbe Richtung
- Mit  $(z(0) = \dot{z}(0) = 0, r_0, \varphi_0, E, l)$  hat das Problem die erforderlichen 6 Anfangsbedingungen  
 $\dot{r}(0), \dot{\varphi}(0)$  aus

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}(0)^2 + U_{eff}(r_0) \quad \dot{\varphi}(0) = \frac{l}{\mu r_0^2}$$

Bahn  $r(\varphi)$

$$\dot{r}(\varphi) = \frac{dr(\varphi(t))}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{\pm \sqrt{2/\mu(E - U_{eff}(r))}}{l/\mu r^2} = \pm \frac{\sqrt{2\mu}}{l} r^2 \sqrt{E - U_{eff}(r)}$$

Damit, Separation der Variablen

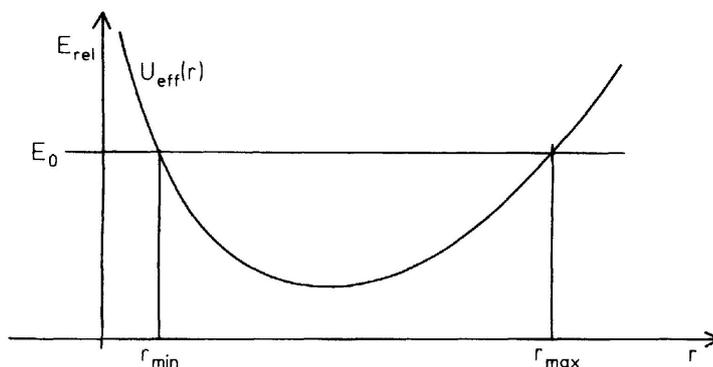
$$\varphi - \varphi_0 = \pm \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^r dr' \frac{1}{r'^2 \sqrt{E - U_{eff}(r')}} \quad (4)$$

### Qualitative Diskussion

$$E = T + U \geq U, \quad E = U, \text{ wenn } \dot{r} = 0$$

Annahme:  $l \neq 0$

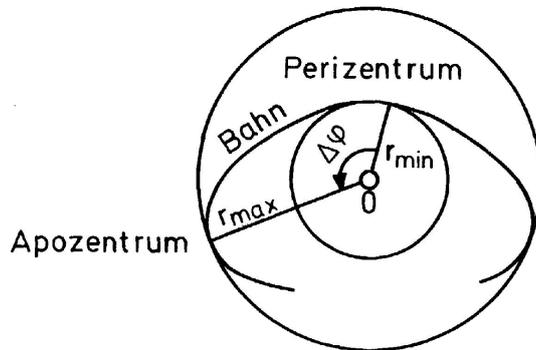
- $U_{eff}$  sei von der Form



Eine mögliche Form von  $U_{eff}(r)$ , für die der Abstand  $r$  bei gegebener Energie  $E_0$  zwischen  $r_{min}$  und  $r_{max}$  liegen muß

Bei  $r_{min}$  und  $r_{max}$  gilt  $\dot{r} = 0$ , aber nicht  $\dot{\varphi} = 0$ , da  $l \neq 0$   
 Bewegung

- beschränkt auf Kreisring  $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ <sup>2</sup>
- $\dot{\varphi} \neq 0$ . Folge:  $\varphi$  wächst monoton
- $r$  oszilliert zwischen  $r_{min}$  und  $r_{max}$



### Typische Bahn für das effektive Potential

- $r_{min}$ : Perizentrum (bei Sonne Perihel, bei Erde Perigäum)
- $r_{max}$ : Apozentrum (bei Sonne Aphel, bei Erde Apogäum)

Wichtig: Die Bahn ist nicht notwendig geschlossen

Winkel  $\Delta\varphi$  von Perizentrum zum nächsten Apozentrum ist mit Gl. (4)

$$\Delta\varphi = \pm \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr' \frac{1}{r'^2 \sqrt{E - U_{eff}(r')}}$$

Damit Winkel zwischen zwei Perizentren  $2\Delta\varphi$

Bahn nur geschlossen, wenn  $n\Delta\varphi = m\pi$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$

Sonst Rosette: Periheldrehung

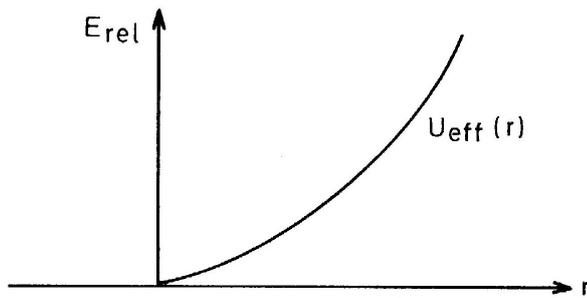
- Es gibt  $E = E_{min}$ , so dass  $r = \text{const} = r_0$   
Bahn ist Kreis, der gleichförmig durchlaufen wird mit

$$\varphi(t) = \frac{l}{\mu r_0^2} t + \varphi_0$$

- Für  $l = 0$  verschwindet Zentrifugalbarriere, auch  $r = 0$  wird möglich

---

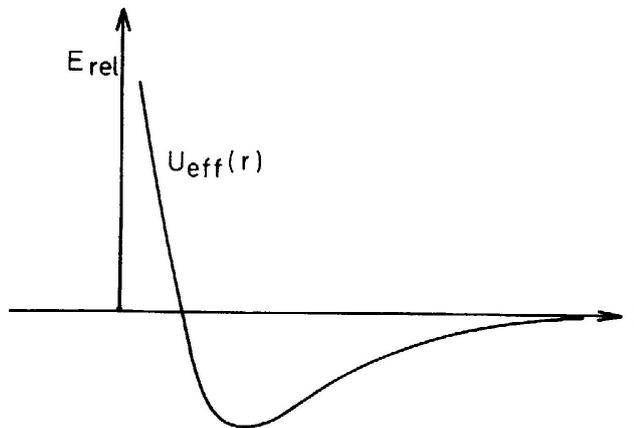
<sup>2</sup>Großes Problem, wenn man zur Sonne fliegen will



Ist der Drehimpuls  $l=0$ , so gibt es keine Zentrifugalbarriere. Auch  $r=0$  ist möglich

$l = 0 \implies \vec{r} \parallel \vec{v}$  und  $\dot{\varphi} = 0$  Bewegung zentral

- Gilt  $U(r) \rightarrow U_0$  für  $r \rightarrow \infty$ , addiere Konstante, so dass  $U(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$



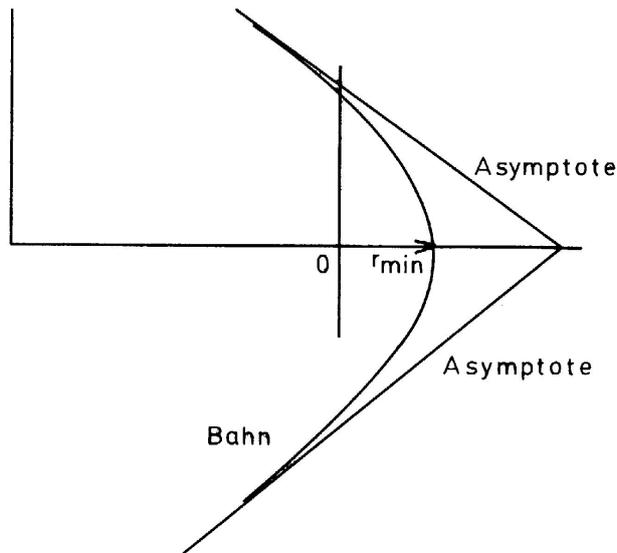
Graph von  $U_{\text{eff}}(r)$  (mit  $l \neq 0$ ) für den Fall, daß das effektive Potential für  $r \rightarrow \infty$  endlich bleibt

- Zwei interessante Fälle

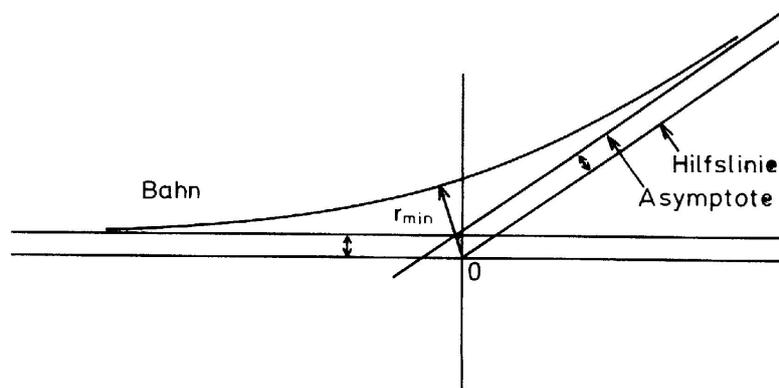
$E < 0$  Bahnen beschränkt, alles wie bisher

$E > 0$

- $r_{\text{max}} = \infty$
- Perizentrum  $r_{\text{min}}$  existiert noch
- Unterscheide anziehendes und abstossendes Potential



**Bahn für ein anziehendes Potential für den Fall  $E_0 \geq 0$**



**Bahn für ein abstoßendes Potential für den Fall  $E_0 \geq 0$**

Für  $r \rightarrow \infty$  gilt

\*  $\dot{\varphi} \rightarrow 0$  Integral:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^{\infty} dr' \frac{1}{r'^2 \sqrt{E - U_{eff}(r')}}$$

geht gegen endlichen Grenzwert

\* Winkel zwischen Perizentrum und Asymptote:

$$\Delta\varphi = \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{min}}^{\infty} dr' \frac{1}{r'^2 \sqrt{E - U_{eff}(r')}}$$

\* Ferner

$$|\dot{r}| = \sqrt{2/\mu(E - U_{eff}(r))} \rightarrow \sqrt{2/\mu E} = v_{\infty}$$

Damit

$$E = T = \frac{1}{2}\mu v_{\infty}^2$$

\* Kommt im Detail in Kapitel 3.2 Streuung

Lessons learned:

- In abgeschlossenen Mehr-Körper-Systemen gilt
  - Aufspaltung: Schwerpunkts- und Relativbewegungsgleichung
  - Aufspaltung: Schwerpunkts- und Relativenergie
  - Gesamtdrehimpuls ist erhaltene Größe
  - Aufspaltung Schwerpunkts- und Relativdrehimpuls/drehmoment
  - Schwerpunkt- und Relativanteil Drehimpuls einzeln erhalten
- Zwei-Körper-Problem
  - 2. Keplersche Gesetz gilt allgemein & folgt aus Drehimpulserhaltung
  - Drehimpuls führt zu effektivem Potential mit Zentrifugalbarriere
  - Im allgemeinen sind die gebundenen Bahnen des Zwei-Körper-Problems nicht geschlossen

2. Di. 20

### 3 Kepler-Problem & Streuung

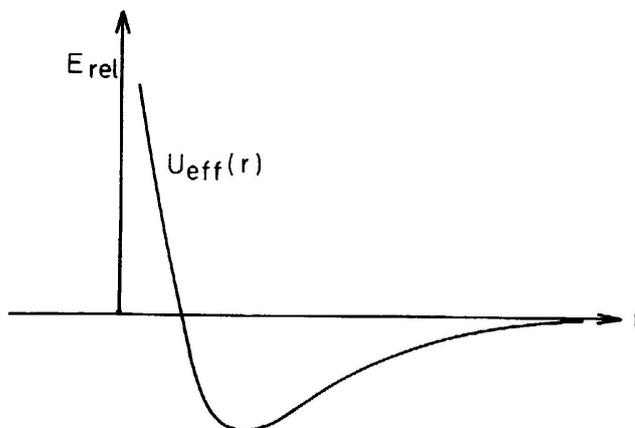
#### 3.1 Kepler Problem

Kepler-Problem: Bestimmung von Bahnen für Zwei-Körper-Problem mit Potential

$$U(r) = -\frac{\kappa}{r} \quad (5)$$

Für  $\kappa = \gamma m_1 m_2$ : Gravitationspotential.

$$U_{eff}(r) = -\frac{\kappa}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad (6)$$



**Graph von  $U_{eff}(r)$  (mit  $l \neq 0$ ) für den Fall, daß das effektive Potential für  $r \rightarrow \infty$  endlich bleibt**

Minimalwert von  $U_{eff}(r)$ :

$$\frac{d}{dr} U_{eff}(r) = \frac{\kappa}{r^2} - 2 \frac{l^2}{2\mu r^3} \stackrel{!}{=} 0 \quad (7)$$

$$r_{min} = \frac{l^2}{\mu\kappa} \quad (8)$$

$$U_{eff,min} = -\frac{\kappa}{\frac{l^2}{\mu\kappa}} + \frac{l^2}{2\mu(\frac{l^2}{\mu\kappa})^2} = -\frac{\mu\kappa^2}{l^2} + \frac{\mu\kappa^2}{2l^2} = -\frac{\mu\kappa^2}{2l^2} \quad (9)$$

## Herleitung der Keplerschen Gesetze aus dem Gravitationsgesetz

### 1. Kepler Gesetz

- Mit Gl. (4)

$$\varphi = \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_r dr' \frac{1}{r'^2 \sqrt{E + \kappa/r' - l^2/2\mu r'^2}} \quad (10)$$

- Variablensubstitution:

$$r' = 1/s, \quad s = 1/r' \quad ds/dr' = -1/r'^2 \quad ds = -dr'/r'^2 \quad (11)$$

$$\varphi = - \int_{1/r} ds \frac{1}{\sqrt{2\mu E/l^2 + 2\mu\kappa s/l^2 - s^2}} \quad (12)$$

Analytisch lösbar (B-integral):

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{c + 2bx - x^2}} = -\arccos \frac{x - b}{\sqrt{b^2 + c}} \quad (13)$$

$$\varphi - \varphi_0 = \arccos \frac{1/r - \mu\kappa/l^2}{\sqrt{\mu^2\kappa^2/l^4 + 2\mu E/l^2}} \quad (14)$$

$$= \arccos \frac{(l^2/\mu\kappa)(1/r) - 1}{\sqrt{1 + (2l^2 E/\mu\kappa^2)}} \quad (15)$$

Das ist  $\varphi(r)$  für das Kepler-Problem

- Zur Vereinfachung führe ein:

$$p = l^2/\mu\kappa \quad r_{min} \quad (16)$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + 2l^2 E/\mu\kappa^2} \quad \text{Exzentrizität, Maß für die Abweichung von Kreisform}$$

Folgt

$$\varphi - \varphi_0 = \arccos \left( \frac{p/r - 1}{\epsilon} \right) \quad (17)$$

oder

$$\epsilon \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{p}{r} - 1 \quad (18)$$

oder mit  $\varphi_0 = 0$

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi} \quad (19)$$

### Polargleichung für Kegelschnitt

$\epsilon < 1$ , d.h.  $E < 0$ : Ellipse, Spezialfall  $\epsilon = 0$ : Kreis

$\epsilon = 1$ , d.h.  $E = 0$ : Parabel

$\epsilon > 1$ , d.h.  $E > 0$ : Hyperbel

5 23

- Für  $E < 0$  wie vom Zwei-Körper-Problem erwartet eine gebundene Bewegung, hier für  $U(r) \propto 1/r$  folgt Ellipse, die einfachste Form der geschlossenen Bahnkurve.
  - Für  $U(r) \propto 1/r^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$  keine Ellipse, sondern Rosette
  - Rosette: "Ellipse mit Periheldrehung"  
Ellipse: Degenerierte Rosette
  - Rosette generisch<sup>3</sup> nicht geschlossen
  - Erinnerung: Geschlossen wenn

$$\Delta\varphi(\text{Perihel zu Perihel}) = \frac{n}{m}\pi, \quad n, m \in \mathbb{N} \quad (20)$$

Im Allgemeinen:

$$\Delta\varphi(\text{Perihel zu Perihel}) = a\pi, \quad a \in \mathbb{R} \quad (21)$$

$\mathbb{Q}$  abzählbar unendlich,  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  überabzählbar unendlich

Fallunterscheidungen

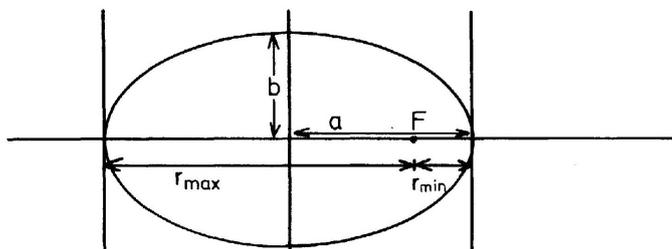
(i)  $\epsilon < 1$ ,  $E < 0$ , gebundene Bewegung

$r$  oszilliert zwischen

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \epsilon}, \quad \varphi = 0 \quad (22)$$

und

$$r_{\max} = \frac{p}{1 - \epsilon}, \quad \varphi = \pi \quad (23)$$



**Bahn eines Teilchens im Kepler-Problem für  $E < 0$ . Die Bahn ist eine Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$**

Große Halbachse:

<sup>3</sup>Generisch ist das, was passiert, wenn ich mit Augen zu in einen Eimer greife, in dem sich alle Möglichkeiten befinden

$$2a = r_{min} + r_{max} = \frac{p}{1 + \epsilon} + \frac{p}{1 - \epsilon} = \frac{2p}{1 - \epsilon^2} \quad (24)$$

Ergo:

$$a = \frac{p}{1 - \epsilon^2} = l^2 / \mu \kappa \left( -\frac{\mu \kappa^2}{2l^2 E} \right) = \frac{\kappa}{2|E|} \quad (25)$$

Kleine Halbachse:

Wegen:

$$\epsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (26)$$

$$b^2 = a^2(1 - \epsilon^2) = \frac{\kappa^2}{4E^2} \left( -\frac{2l^2 E}{\mu \kappa^2} \right) = \frac{l^2}{2|E|\mu} = p a \quad (27)$$

Insgesamt:

- Das 1. Keplersche Gesetz: Planeten beschreiben Ellipsenbahn, in einem Brennpunkt der Schwerpunkt. Sonnenmasse  $\sim 300.000$  Erdmasse
- Große und kleine Hauptachse hängen von Energie und Drehimpuls ab
- These der Ellipse macht Newtonsche Theorie zu einer "guten" Theorie
  - Nullmenge in der Menge aller Möglichkeiten
  - empirisch gut testbar.

Exzentrizitäten der Planeten:

- Merkur  $\epsilon = 0.206$ , aber selten zu sehen
- Erde  $\epsilon = 0.017$
- Mars  $\epsilon = 0.093$ , an ihm entdeckt

3. Kepler Gesetz:

$$dF = \frac{1}{2\mu} |L| dt \quad (28)$$

Fläche pro Periode  $T$ : Ellipse mit

$$F = \pi ab = \frac{1}{2\mu} l T \quad (29)$$

Mit Gl. (16, 27)

$$T = \frac{2\pi\mu}{l} ab = \frac{2\pi\mu}{l} a \sqrt{pa} \quad (30)$$

$$= \frac{2\pi\mu}{l} a^{3/2} \frac{l}{\sqrt{\mu\kappa}} = 2\pi \sqrt{\mu/\kappa} a^{3/2} \quad (31)$$

$$(32)$$

Für Gravitation:

$$T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{\gamma m_1 m_2} a^3 = \frac{4\pi^2}{\gamma(m_1 + m_2)} a^3 \quad (33)$$

Sonnenmasse, say,  $m_1 \gg$  Planetenmasse, say,  $m_2$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma m_1} a^3 \quad (34)$$

q.e.d

Von Kepler III zu Gravitationsgesetz, leicht hand-waving:

- Kepler III umformuliert:

$$r^3/T^2 = const, \quad \omega = 2\pi/T, \quad r^3\omega^2 = const, \quad r\omega^2 \propto 1/r^2 \quad (35)$$

- Für Ellipse gilt

Aus

$$\vec{r}(t) = r_1 \vec{e}_1 \cos \omega t + r_2 \vec{e}_2 \sin \omega t \quad (36)$$

folgt

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t) \quad (37)$$

- Zusammen:

$$F = m\ddot{\vec{r}}(t) \propto -\omega^2 \vec{r}(t) \propto 1/r^2 \quad (38)$$

(ii)  $\epsilon = 1$ ,  $E = 0$ , Streuung

Parabel, interessanter Grenzfall

(iii)  $\epsilon > 1$ ,  $E > 0$ , Streuung

Hyperbeln

- Allgemein

$$- r = p/(1 + \epsilon \cos \varphi) > 0$$

-  $(1 + \epsilon \cos \varphi)$  kann positiv und negativ sein

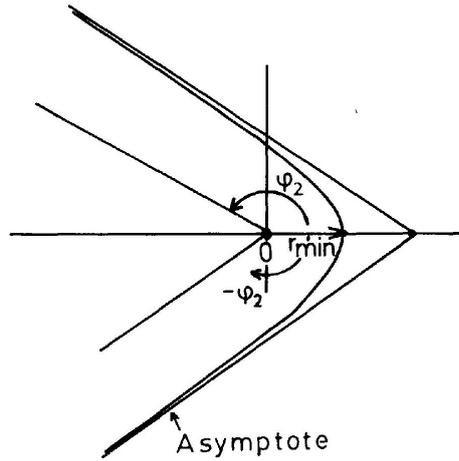
$$p = \frac{l^2}{\mu\kappa} \quad \text{positiv oder negativ, je nach Vorzeichen von } \kappa$$

Schränkt mögliche Winkel  $\varphi$  ein

- $\kappa > 0$ , anziehende Kraft

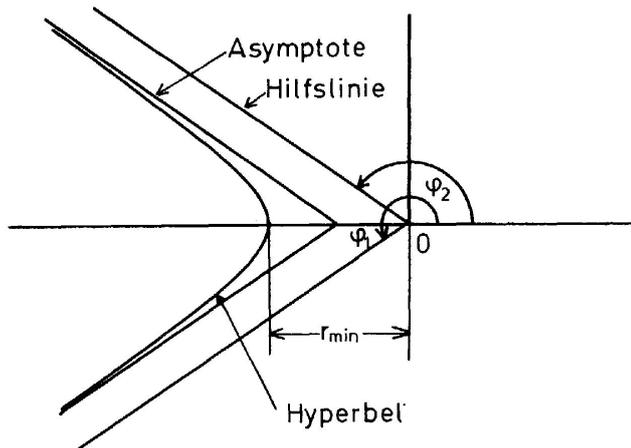
$$- \text{Perizentrum: } r = r_{min} = p/(1 + \epsilon), \varphi = 0$$

- Asymptote:  $r = \infty \implies 1 + \epsilon \cos \varphi_2 = 0, |\varphi_2| > \pi/2$



**Bahn eines Teilchens im Kepler-Problem (anziehendes Potential) für  $E > 0$**

- $\kappa < 0$ , abstoßende Kraft  $p < 0 \implies 1 + \epsilon \cos \varphi < 0, |\varphi| > \pi/2$



**Bahn eines Teilchens im Kepler-Problem (abstoßendes Potential) für  $E > 0$**

- Streuung, siehe nächstes Unterkapitel

### Lenz-Runge Vektor

- Zurück zu  $E < 0$   
Beim Potential

$$U(r) = -\kappa/r \tag{39}$$

Ellipse (= keine Periheldrehung)

- Legt weitere Erhaltungsgröße nahe, z.B. Vektor vom Zentrum zum Perihel
- Betrachte Bewegungsgleichung & Drehimpuls

$$\mu \ddot{\vec{r}} + \kappa \frac{\vec{r}}{r^3} = 0, \quad \vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \tag{40}$$

- Zur Vereinfachung

$$\beta = \frac{\kappa}{\mu}, \quad \vec{C} = \frac{\vec{L}}{\mu} \quad (41)$$

- Ergibt:

$$\ddot{\vec{r}} + \beta \frac{\vec{r}}{r^3} = 0, \quad \vec{C} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (42)$$

- Vektorielle Multiplikation der Bewegungsgleichung mit  $\vec{C}$

$$0 = \ddot{\vec{r}} \times \vec{C} + \beta \frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{C} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{C}) + \frac{\beta}{r^3} \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \quad (43)$$

$$= \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{C}) + \frac{\beta}{r^3} [\vec{r}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) - \dot{r}^2 \vec{r}] \quad (44)$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}} \times \vec{C} - \beta \frac{\vec{r}}{r} \right), \quad (45)$$

da

$$\frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\dot{\vec{r}} r - \vec{r} \dot{r}}{r^2} \quad (46)$$

Erweitere mit  $r$ , nutze  $\dot{r}^2 = r^2$  und  $\vec{r} \dot{\vec{r}} = r \dot{r}$  et voilà !

- Ergo:

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{C} - \beta \frac{\vec{r}}{r} \quad (47)$$

ist zeitlich konstant.

- Da  $\vec{A}$  konstant, kann  $\vec{A}$  auch im Perihel bestimmt werden.
- Dort liegen  $\dot{\vec{r}} \times \vec{C}$  und  $\frac{\vec{r}}{r}$  in Richtung des Perihels.
- Also zeigt  $\vec{A}$  immer in Richtung Perihel.
- Zusätzliche Erhaltungsgröße neben  $E$  und  $\vec{L}$  !

- Konstanz des Lenz-Runge Vektors ist nur für  $1/r$  Potential gegeben.

Beobachtete Periheldrehung des Merkur: 573 Bogensekunden pro Jahrhundert

- 530 " : Einfluß der anderen Planeten
- 43 " : Effekte der Allgemeinen Relativitätstheorie

ART:  $1/r$  Potential ist nur eine Näherung,  $1/r^2$ -Beitrag reicht für Periheldrehung

Leseempfehlung:

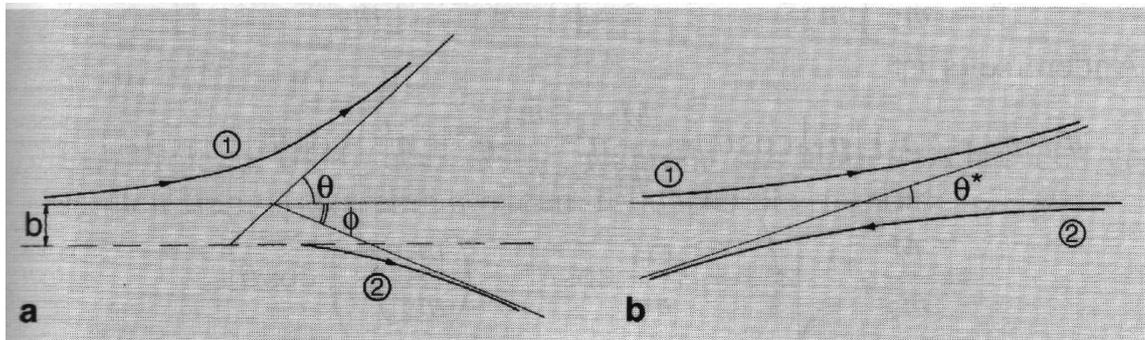
D.L. Goodstein, J.G. Goodstein: Feynmans verschollene Vorlesung  
Die Bewegung der Planeten um die Sonne. Piper, 2002

3. Di. 20

## 3.2 Streuung

### 3.2.1 Schwerpunkt- und Laborsystem

- In der Regel ruht ein Teilchen (Target) und wird mit einem anderen (Projektil) beschossen: Laborsystem
- Aber Rechnungen im Schwerpunktsystem einfacher



(a) Das Projektil 1 kommt aus dem Unendlichen und streut an dem ursprünglich ruhenden Target 2, das hierdurch in Bewegung gesetzt wird.

(b) Derselbe Streuprozess im Schwerpunktsystem der Teilchen 1 und 2 angeschaut. Die Unterscheidung Projektil und Target verschwindet

- Stoßparameter  $b$

Legt Drehimpuls fest  $\vec{L} = \vec{b} \times \vec{p}(t = -\infty) = bp$

Annahme: Elastischer Stoss, innerer Zustand ändert sich nicht, keine Anregungen

Nomenklatur:

- Laborsystem:  $p_{Li}$  vor,  $p'_{Li}$  nach dem Stoss
- Schwerpunktsystem:  $p_{S1} = -p_{S2}$  vor,  $p'_{S1} = -p'_{S2}$  nach dem Stoss
- Impuls des Schwerpunkts:  $P$

Energieerhaltung

$$\frac{p_{L1}^2}{2m_1} = \frac{p'_{L1}{}^2}{2m_1} + \frac{p'_{L2}{}^2}{2m_2} \quad (48)$$

Impulserhaltung:

$$p_{L1} = p'_{L1} + p'_{L2} \quad (49)$$

Zerlegung in Schwerpunkts- und Relativbewegung:

- Vor dem Stoss:

$$p_{L1} = \frac{m_1}{M}P + p_{S1} \quad M = m_1 + m_2 \quad (50)$$

$$p_{L2} = \frac{m_2}{M}P - p_{S1} = 0 \quad (51)$$

also:

$$P = \frac{M}{m_2}p_{S1} \quad p_{L1} = P \quad (52)$$

- Nach dem Stoss

$$p'_{L1} = \frac{m_1}{M}P + p'_{S1} = \frac{m_1}{m_2}p_{S1} + p'_{S1} \quad (53)$$

$$p'_{L2} = \frac{m_2}{M}P - p'_{S1} = p_{S1} - p'_{S1} \quad (54)$$

- Erhaltung der kinetischen Energie der Relativbewegung:

$$|\vec{p}_{S1}| = |\vec{p}'_{S1}| =: p_S^* \quad (55)$$

Seien  $\theta_L$  und  $\theta_S$  die Streuwinkel

- Mit Gl. (52)  $p_{L1} = \frac{M}{m_2}p_{S1}$  und Gl. (53)  $p'_{L1} = \frac{m_1}{m_2}p_{S1} + p'_{S1}$

- Einerseits

$$p_{L1}p'_{L1} = \frac{M}{m_2} \left( \frac{m_1}{m_2}p_{S1}^2 + p_{S1}p'_{S1} \right) = \frac{M}{m_2}p_S^{*2} \left( \frac{m_1}{m_2} + \cos\theta_S \right) \quad (56)$$

Andererseits:

$$p_{L1}p'_{L1} = |p_{L1}||p'_{L1}|\cos\theta_L = \frac{M}{m_2}p_S^* \left| \frac{m_1}{m_2}p_{S1} + p'_{S1} \right| \cos\theta_L \quad (57)$$

$$= \frac{M}{m_2}p_S^{*2} \sqrt{1 + 2\frac{m_1}{m_2}\cos\theta_S + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2} \cos\theta_L \quad (58)$$

- Damit:

$$\cos\theta_L = \left( \frac{m_1}{m_2} + \cos\theta_S \right) / \sqrt{1 + 2\frac{m_1}{m_2}\cos\theta_S + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2} \quad (59)$$

- Mit Identität

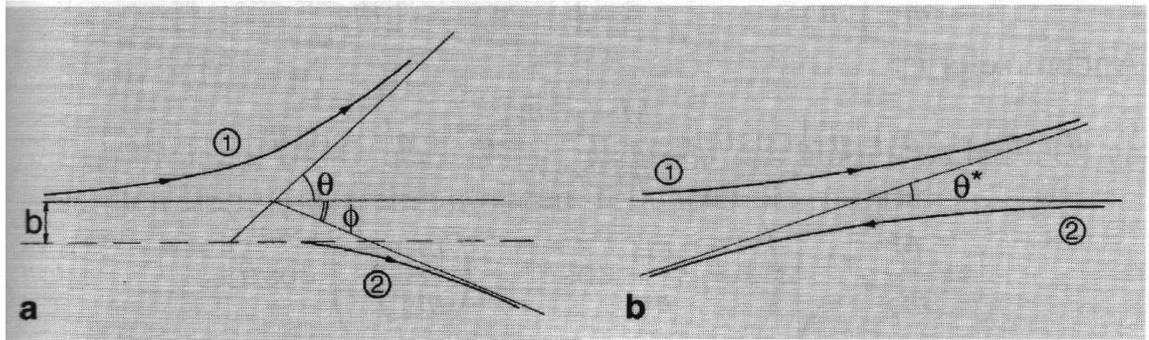
$$\tan^2\theta_L = -1 + \frac{1}{\cos^2\theta_L} \quad (60)$$

folgt

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\theta_S}{m_1/m_2 + \cos\theta_S} \quad (61)$$

- Bezeichnet man mit  $\Phi_L$  den Winkel mit dem im Laborsystem das Targetteilchen wegläuft, so zeigt man leicht:

$$\Phi_L = \frac{\pi - \theta_S}{2} \quad (62)$$



(a) Das Projektil 1 kommt aus dem Unendlichen und streut an dem ursprünglich ruhenden Target 2, das hierdurch in Bewegung gesetzt wird.

(b) Derselbe Streuprozess im Schwerpunktsystem der Teilchen 1 und 2 angeschaut. Die Unterscheidung Projektil und Target verschwindet

- Spezialfälle:

- Projektilmasse  $m_1 \ll$  Targetmasse  $m_2$ , dann  $\theta_S \approx \theta_L$
- $m_1 = m_2$ :  $\theta_L = \theta_S/2$ ,  $\theta_L + \Phi_L = \pi/2$

6 23

### 3.2.2 Rutherford-Streuung

Kepler-Problem der Streuung für geladene Teilchen

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \quad (63)$$

Kepler-Problem im Schwerpunkt-System<sup>4</sup>: Hyperbeln mit

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi} \quad (64)$$

mit

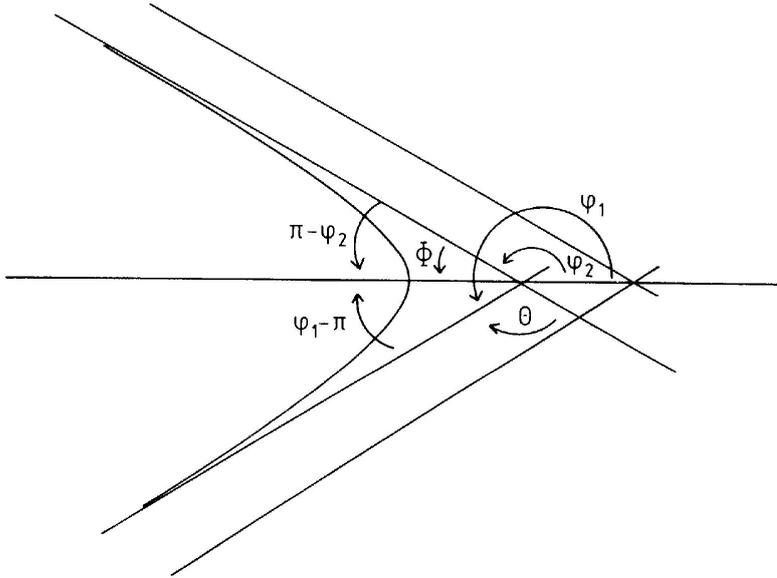
$$p = l^2 / \mu \kappa \quad (65)$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + 2l^2 E / \mu \kappa^2} \quad (66)$$

mit

$$1 + \epsilon \cos \varphi_i = 0 \quad (67)$$

<sup>4</sup>Man versuche, das im Laborsystem zu rechnen



Der Streuwinkel  $\theta$  ist durch die Ablenkung der Relativgeschwindigkeit bestimmt. Es ist  $\Phi = \pi - \varphi_2 = \varphi_1 - \pi$  und  $2\Phi + \theta = \pi$

Es gilt

$$\pi - \varphi_2 = \varphi_1 - \pi = \Phi \quad (68)$$

Weiterhin

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pi - \theta, \quad \text{also mit} \quad (69)$$

$$\varphi_1 - \pi = \pi - \varphi_2 \quad \text{auch} \quad (70)$$

$$\pi - \varphi_2 = \varphi_2 - \theta \quad \text{oder} \quad (71)$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi + \theta}{2} \quad (72)$$

Damit:

$$-\frac{1}{\epsilon} = \cos \varphi_2 = \cos \left( \frac{\pi + \theta}{2} \right) = -\sin \theta/2 \quad (73)$$

$$\sin \theta/2 = \frac{1}{\sqrt{1 + 2l^2 E / \mu \kappa^2}} \quad (74)$$

Mit Identität

$$\sin \theta/2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta/2}} \quad (75)$$

$$\cot^2 \theta/2 = 2l^2 E / \mu \kappa^2 \quad (76)$$

Mit

$$v_\infty = |\dot{\vec{r}}(t = -\infty)| = |\dot{\vec{r}}(t = \infty)|, \quad l = \mu b |v_\infty|, \quad E = \frac{1}{2} \mu v_\infty^2, \quad \tan \theta/2 = \sqrt{\frac{1}{\cot^2 \theta/2}} \quad (77)$$

Abhängigkeit des Streuwinkels  $\theta$  von Stoßparameter  $b$

$$\tan \theta/2 = \frac{|\kappa|}{\mu v_{\infty}^2 b} \quad (78)$$

Bemerkung:

- Je kleiner  $b$ , desto größer  $\theta$ ,  $b \rightarrow 0$  folgt  $\theta \rightarrow \pi$ . Drehimpuls verschwindet.
- Zentraler Stoß:  $r_{min}$  kann berechnet werden aus

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + U(r) \quad (79)$$

Vor dem Stoß:  $E = \frac{1}{2}\mu v_{\infty}^2$

Am Umkehrpunkt:  $E = U(r_{min}) = -\kappa/r_{min}$

- Ergo, für  $b = 0$

$$r_{min} = \frac{2|\kappa|}{\mu v_{\infty}^2} \quad (80)$$

Gelangt  $r_{min}$  in Bereich der Radien der Ladungsträger, so wird es Abweichungen von Streuformel geben, da nicht mehr als Punktteilchen behandelbar.

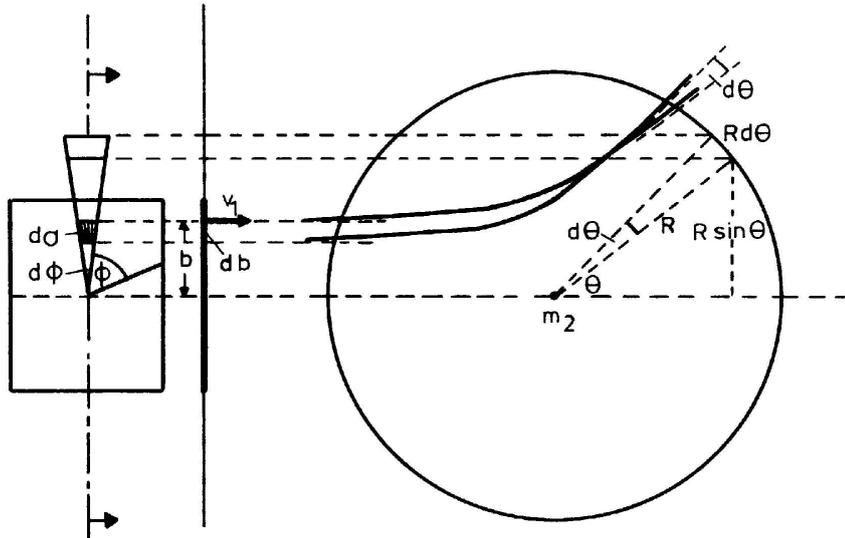
Anwendung:

- Teilchen 1  $\alpha$ -Teilchen mit  $v = 1.61 \times 10^9$  cm/s
- Teilchen 2 Kupferkern
- $r_{min} = 1.55 \times 10^{-12}$  cm
- Experimenteller Befund: Streuformel gilt
- Ergo Atomkerne kleiner als  $10^{-12}$  cm
- Rutherford's Widerlegung (1909) des Thompson'schen "Rosinenkuchen-Modells" (1903)

### 3.2.3 Streuquerschnitt

Experimentelles Setting:

- Strahl mit bestimmten Durchmesser wird auf Streuzentrum geschossen



**Darstellung der Trajektorien von Teilchen mit benachbartem  $b$  und  $\theta$**

- Durch Messung der Ablenkung in Streuwinkelbereich  $(\theta, \theta + d\theta)$  und Azimutwinkelbereich  $(\Phi, \Phi + d\Phi)$  Rückschluss auf Potential
- Gemessene Größe: Pro Zeiteinheit in Raumwinkelement  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\Phi$  gestreute Teilchen
- Zentraler experimenteller Zugang in Teilchenphysik & Kristallographie
- Lerne aus "lange vor" und "lange nach" dem Streuprozess, was im Mikroskopischem passiert.
- Zu jedem  $\theta$  gehört ein  $b$
- Teilchen, die in  $d\Omega$  landen, kommen aus Flächenelement

$$d\sigma = -b db d\Phi, \quad b = b(\theta)$$

Minuszeichen, weil Zunahme von  $\theta$  Abnahme von  $b$  bedeutet

$d\sigma$ , resp.  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  heißt differentieller Wirkungs-/Streuquerschnitt

Beispiel: Rutherford Streuung

- Coulomb-Potential

$$\tan \theta/2 = \frac{|\kappa|}{\mu v_{\infty}^2 b} \quad (81)$$

$$b = \frac{|\kappa| \cot \theta/2}{\mu v_{\infty}^2} \quad (82)$$

- Folglich:

$$db = -\frac{\kappa}{2\mu v_{\infty}^2} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} d\theta \quad (83)$$

$$d\sigma = -b db d\Phi \quad (84)$$

$$= \left(\frac{\kappa}{\mu v_\infty^2}\right)^2 \frac{1}{2 \sin^2 \theta/2} \frac{\cos \theta/2}{\sin \theta/2} d\theta d\Phi \quad (85)$$

$$\text{mit } \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad x = \theta/2, \quad \cos \theta/2 = \frac{\sin \theta}{2 \sin \theta/2} \quad (86)$$

$$= \left(\frac{\kappa}{\mu v_\infty^2}\right)^2 \frac{1}{4 \sin^4 \theta/2} \sin \theta d\theta d\Phi \quad (87)$$

$$= \left(\frac{\kappa}{2\mu v_\infty^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} d\Omega \quad (88)$$

Differentieller Wirkungs-/Streuquerschnitt der Rutherford Streuung:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\kappa}{2\mu v_\infty^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \quad (89)$$

Totaler Wirkungs-/Streuquerschnitt:

$$\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (90)$$

Bedeutung: Eingangsfläche, die alle Teilchen durchqueren, die überhaupt gestreut werden.

Hier:

$$\sigma_{tot} = \int_{\Phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta d\Phi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sim 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} = \infty \quad (91)$$

Interpretation:

- Will man Querschnitt des einfallenden Strahls so gross machen, dass auch Streuwinkel  $\theta = 0$  auftritt, so ist Querschnitt  $\infty$
- Coulomb-Potential ist langreichweitig. Im Gegensatz zu schwacher und starker Kernkraft.

In der Regel: Target viele Teilchen. Wenn

- Target klein gegen Strahldurchmesser
- Teilchen nicht zu dicht gepackt

nur Erhöhung der Intensität

Übung: Streuquerschnitt von Kugel

Lessons learned:

- Kepler Gesetze lassen sich durch Newtonsche Mechanik verstehen
- Für  $U \propto 1/r^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$  geben sich im Zwei-Körper-Problem generisch nicht-geschlossene Rosetten
- Für Gravitationspotential sind Bahnen des Zwei-Körper-Problems Ellipsen.
- Lenz-Runge-Vektor als zusätzliche Erhaltungsgröße
- Streuquerschnitt für  $1/r$ -Potential  $\sim 1/\sin^4(\theta/2)$
- Totaler Streuquerschnitt bei  $1/r$  unendlich wegen Langreichweitigkeit

3. Do. 20

## 4 Lineare Schwingungen

Linearisierung :

- Kräfte um eine Gleichgewichtslage  $x = 0$  lassen sich Taylor-entwickeln

$$F(x) = -ax - bx^2 - cx^3 - \dots \quad (92)$$

- Entspricht für Potential

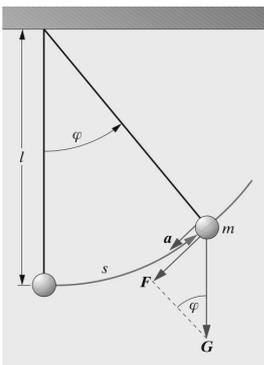
$$U(x) = const + \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{4}cx^4 + \dots \quad (93)$$

- Oft: Abbruch nach linearem Term sinnvoll.
- Ergibt lineare, oder besser linearisierte Bewegungsgleichungen
- Wichtig: Bei linearen Systemen gilt Superpositionsprinzip:  
Mit Lösungen  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  ist auch  $ax_1(t) + bx_2(t)$  Lösung

7 23

### 4.1 Eindimensionale Systeme

#### 4.1.1 Harmonischer Oszillator



- Taylor-Entwicklung

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi = -mgl \left( \varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 - \dots \right) \quad (94)$$

- Linearisierung:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\varphi, \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi \quad (95)$$

Ansatz:

$$\varphi(t) = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t, \quad \text{folgt: } \omega^2 = \frac{g}{l} \quad \omega = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (96)$$

- Analog Federpendel

$$m\ddot{x} = -Dx, \quad \text{das ist schon die lineare Näherung} \quad (97)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \omega^2 = \frac{D}{m} \quad (98)$$

- Allgemeine Lösung:

$$\varphi(t) = \text{Re}\{A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}\} \quad (99)$$

DGL 2. Ordnung: Zwei Anfangsbedingungen:  $\varphi(0) = \alpha, \dot{\varphi}(0) = \beta$

$$\varphi(0) = \text{Re}\{A_1 + A_2\} = \alpha \quad (100)$$

$$\dot{\varphi}(0) = \text{Re}\{i\omega A_1 - i\omega A_2\} = \beta \quad (101)$$

Mögliche Lösung:  $A_1 = \alpha, A_2 = i\beta/\omega$

$$\varphi(t) = \alpha \cos \omega t + (\beta/\omega) \sin \omega t = C \cos(\omega t - \delta), \quad C = \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^2}{\omega^2}}, \quad \tan \delta = \frac{\beta}{\alpha\omega} \quad (102)$$

#### 4.1.2 Homogenes gedämpftes lineares System

- Betrachte:

$$\ddot{x}(t) + 2\rho\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad \rho, \omega_0^2 > 0 \quad (103)$$

Harmonischer Oszillator mit Stokes'scher Reibungskraft  $-2\rho\dot{x}$

$$\dot{E} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \right) \quad (104)$$

$$= \dot{x}(\ddot{x} + \omega_0^2 x) = -2m\rho\dot{x}^2 \quad (105)$$

Macht Sinn.

- Zur Lösung Komplexifizierung

– Betrachte Gl. (103) für komplexwertige  $x(t)$

– Es gilt Superpositionsprinzip:

Mit Lösungen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  ist auch  $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$  Lösung

– Da  $\rho, \omega_0^2 \in \mathbb{R}$  ist auch komplex konjugiertes  $x(t)^*$  Lösung

- "Re-Reallisierung":  
 $u(t) = \text{Re}(x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) + x(t)^*)$  ist reelle Lösung.

• Exponentialansatz:

$$x(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{106}$$

- Bestimme  $\lambda$  so, dass Gl. (103) erfüllt wird.  
 Eingesetzt, ergibt:

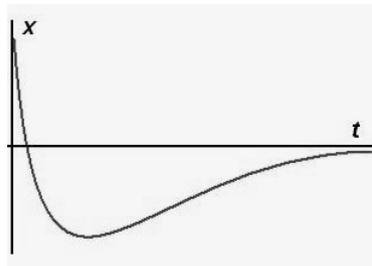
$$\lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{107}$$

- Ansatz führt zur (allgemeinen) Lösung<sup>5</sup>, wenn  $\lambda$  Nullstelle des Polynoms ist:

$$\lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2} \tag{108}$$

- Drei Fälle möglich:
  - \*  $\rho^2 > \omega_0^2$ : Starke Dämpfung, zwei reelle Nullstellen

$$x(t) = e^{-\rho t}(ae^{\hat{\omega}t} + be^{-\hat{\omega}t}), \quad \hat{\omega} = \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2} \tag{109}$$



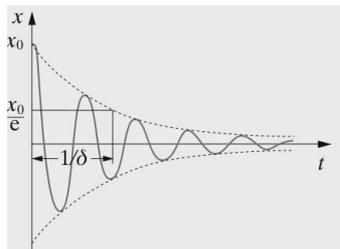
- \*  $\rho^2 < \omega_0^2$ : Schwache Dämpfung, zwei komplex konjugierte Nullstellen  
 Allgemeine komplexe Lösung:

$$x(t) = e^{-\rho t}(\alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} \tag{110}$$

Beachte: Die Frequenz ändert sich im Vergleich zum ungedämpften System

Reell:

$$x(t) = e^{-\rho t}(a' \cos \omega t + b' \sin \omega t) \tag{111}$$



<sup>5</sup>Ansätze müssen nicht zu Lösungen führen. Für "allgemein" siehe aperiodischer Grenzfall. Für überhaupt teste  $x(t) = at^2$

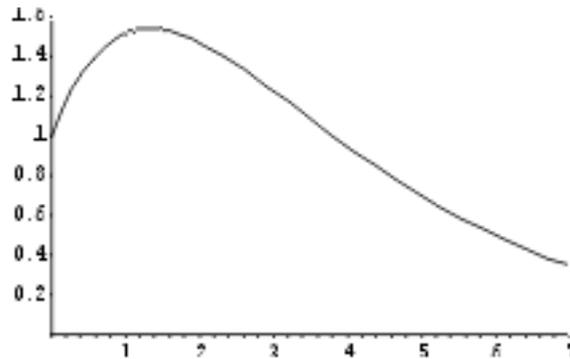
- \*  $\rho^2 = \omega_0^2$ : Aperiodischer Grenzfall  
Exponentialansatz liefert nur eine Lösung.

$$x(t) = a e^{-\rho t} \quad (112)$$

Bietet keine zwei Anfangswerte. Exponentialansatz führt nicht zur vollen Lösung

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = e^{-\rho t}(b + ct) \quad (113)$$



Herleitung per Variation der Konstanten

Ansatz:  $a = a(t)$

$$x(t) = a(t)e^{-\rho t} \quad (114)$$

$$\dot{x}(t) = (\dot{a}(t) - \rho a(t)) e^{-\rho t} \quad (115)$$

$$\ddot{x} = (\ddot{a} - 2\rho\dot{a} + \rho^2 a) e^{-\rho t} \quad t \text{ bei } x, a \text{ unterdrückt} \quad (116)$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung Gl. (103)

$$0 = \ddot{x}(t) + 2\rho\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) \quad (117)$$

$$0 = \underbrace{(\ddot{a} - 2\rho\dot{a} + \rho^2 a)}_{\ddot{x}} + 2\rho \underbrace{(\dot{a} - \rho a)}_{\dot{x}} + \omega_0^2 \underbrace{a}_{x} e^{-\rho t} \quad (118)$$

$$0 = (\ddot{a} + a(\omega_0^2 - \rho^2))e^{-\rho t} \quad (119)$$

Mit

$$\omega_0^2 = \rho^2 \quad \text{und} \quad e^{-\rho t} > 0 \quad (120)$$

folgt

$$\ddot{a} = 0 \quad \text{und damit} \quad a(t) = b + ct \quad (121)$$

### 4.1.3 Harmonisch getriebenes gedämpftes lineares System

- Betrachte harmonisch getriebenes lineares System:

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \quad (122)$$

eine inhomogene Differentialgleichung

Formal:

$$Lx(t) = f(t), \quad L : \text{linearer Differentialoperator mit } L = \left( \frac{d^2}{dt^2} + 2\rho \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) \quad (123)$$

Linear, weil

$$L(ax(t) + by(t)) = aL(x(t)) + bL(y(t)) \quad (124)$$

- Satz:

Wenn  $x_a(t)$  eine spezielle Lösung von Gl. (123) ist, so ist jede weitere Lösung  $x_b(t)$  von der Form

$$x_b(t) = x_a(t) + u(t) \quad (125)$$

wobei  $u(t)$  die homogene Gleichung  $Lu = 0$  löst.

- Beweis:

– Für  $x_b(t)$  gilt:

$$x_b(t) = x_a(t) + (x_b(t) - x_a(t)) \quad (126)$$

und

$$L(x_b(t) - x_a(t)) = Lx_b(t) - Lx_a(t) = f - f = 0 \quad (127)$$

$u(t) = (x_b(t) - x_a(t))$  löst also homogene Gleichung.

– Umgekehrt ist mit

$$Lu(t) = 0 \text{ und } Lx_a(t) = f \quad (128)$$

auch  $L(x_a(t) + u(t)) = L(x_b) = f$ .

– q.e.d.

- Merke: Inhomogenes Problem ist vollständig gelöst, wenn allgemeine Lösung des homogenen Problems und eine einzige Lösung des inhomogenen Problems bekannt ist.

Die Lösung

- Komplexifizierung:

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\omega t} \quad (129)$$

- Exponentialansatz:

$$x(t) = Ae^{i\omega t}, \quad A : \text{komplexe Amplitude} \quad (130)$$

- Eingesetzt:

$$A(-\omega^2 + 2i\rho\omega + \omega_0^2) = f_0, \quad A(\omega) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\rho\omega} \quad (131)$$

Ergibt eine Lösung des inhomogenen Systems

$$x_a(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\rho\omega} e^{i\omega t} \quad (132)$$

- Allgemeine Lösung durch Addition der allgemeinen Lösung des homogenen Systems, Gl. (103).

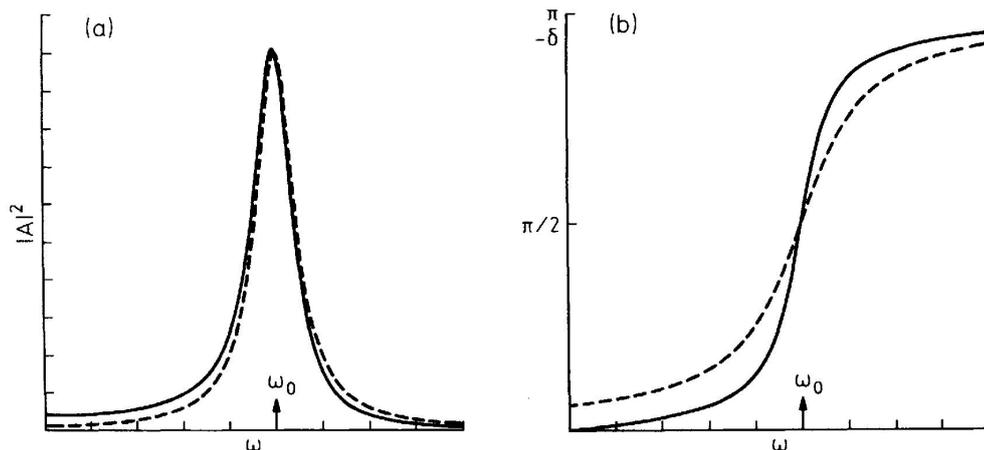
Da diese aber stets mit  $t \rightarrow \infty$  abklingen, strebt jede Lösung gegen die spezielle  $x_a(t)$

- System "vergißt" Anfangsbedingungen im Einschwingvorgang
- Schreibe

$$A = |A|e^{i\delta} \quad (133)$$

ergibt reelle Lösung von Gl. (122)

$x(t) = \operatorname{Re}(x_a(t)) =  A  \cos(\omega t + \delta) \quad (134)$
mit
$ A ^2 = \frac{f_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\rho^2\omega^2}, \quad \tan \delta = \frac{2\rho\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (135)$



Amplitudenquadrat  $|A|^2$  und Phase  $-\delta$  in Abhängigkeit von  $\omega$ . Die durchgezogene Kurve gilt für das exakte Resultat (6.5.4), die gestrichelte Kurve für die Näherung für schwache Dämpfung (6.5.5)

- Interpretation

–  $|A|^2$  hat Maximum bei  $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\rho^2$

Resonanz

Maximum um so schärfer je kleiner Dämpfung  $\rho$

–  $\delta \in [0, -\pi]$

Erschwungene Schwingung hinkt dem äußeren Antrieb nach.

Für  $\omega \rightarrow 0$  folgt  $\delta \rightarrow 0$ , für  $\omega \rightarrow \infty$  folgt  $\delta \rightarrow -\pi$

Phasensprung schärfer, wenn Dämpfung kleiner

## 4.2 Der allgemeine harmonische Fall

Wichtig in vielen Bereichen der Physik

- Festkörperphysik, Gitterschwingungen, Phononen
- Molekülphysik, Schwingungen der Atome, Absorptionsspektren
- Bewegungsgleichung und Energie ein-dimensionaler Fall:

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (136)$$

- Bewegungsgleichungen und Energie mehr-dimensionaler Fall

$$\sum_j (M_{ij}\ddot{x}_j + K_{ij}x_j) = 0, \quad E = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j + K_{ij}x_ix_j \quad (137)$$

- Massenmatrix  $M$  mit  $M_{ij} = M_{ji}$

Nicht-triviale Massenmatrizen, wenn weitere Kopplungen zwischen Massen, z.B. eine starre Verbindung

Zeichnung in 2D mit Stab

Millenium Bridge

$$\sum_{ij} M_{ij}a_ia_j > 0, \quad \text{für } \sum_i a_i^2 \neq 0, \quad \text{man denke an Geschwindigkeiten} \quad (138)$$

da kinetische Energie  $> 0$ , wenn nicht alle Geschwindigkeiten verschwinden

$M_{ij}$  ist positiv definit

- Kopplungsmatrix  $K$  mit  $K_{ij} = K_{ji}$

$$\sum_{ij} K_{ij}a_ia_j > 0, \quad \text{für } \sum_i a_i^2 \neq 0, \quad \text{man denke an Auslenkungen} \quad (139)$$

gilt, wenn  $x^0$  stabile Ruhelage, i.e. Minimum von Potential ist.

An Vok und Sattel erläutern.

- Ab jetzt alle Indices unterdrückt, i.e.  $M, K \in R^{n \times n}$ ,  $x, y \in R^n$

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (140)$$

- $M$  und  $K$  reell und symmetrisch  $\implies$  selbstadjungiert:

$$y \cdot (Mx) = (My) \cdot x, \quad y \cdot (Kx) = (Ky) \cdot x \quad (141)$$

$$\cdot : \text{Skalarprodukt im Reellen} : x \cdot y = \sum_i x_i y_i = x^T y$$

$$\cdot : \text{Skalarprodukt im Komplexen} : x \cdot y = \sum_i x_i^* y_i = x^{T*} y$$

Lösung:

- Komplexifizierung  
wie gehabt

- Exponentialansatz

Ansatz:

$$x(t) = ve^{i\omega t}, \quad x, v \in C^n \quad (142)$$

Bestimme  $v$  und  $\omega$ , so dass  $x(t)$  Lösung von Gl. (140)

- Eingesetzt, ein Verallgemeinertes Eigenwert-Problem:

$$(K - \omega^2 M)v = 0, \quad M^{-1}Kv = \omega^2 v \quad (143)$$

Nichttriviale Lösung  $v \neq 0$ , nur wenn  $(K - \omega^2 M)$  nicht injektiv, also

$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad \text{Bedingungsgleichung für } \omega^2 \quad (144)$
---

- Säkulargleichung: Taucht auf für Langzeit- ("säkular") Verhalten der Planeten bei Störungen durch die anderen auf, siehe Kapitel 12.4 Integrierte Systeme und Hamiltonsches Chaos des GenieserInnen Skriptes
- $n$ -ter Ordnung in  $\omega^2$
- Mögliche Werte von  $\omega^2$  müssen Nullstellen von  $\det(K - \omega^2 M) = 0$  sein

$(K - \omega_\alpha^2 M)v_\alpha = 0 \quad \text{Bedingungsgleichung für } v_\alpha \quad (145)$
--

Seien  $\omega_\alpha^2$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$  die Nullstellen und  $v_\alpha$  die entsprechenden Eigenvektoren mit

$$(K - \omega_\alpha^2 M)v_\alpha = 0 \quad (146)$$

Es gilt

- $\omega_\alpha^2$  ist reell
- Wenn  $x \cdot Kx \geq 0 \forall x$ , dann  $\omega_\alpha^2 \geq 0$   
Wenn  $x \cdot Kx > 0 \forall x \neq 0$ , also  $x_0$  stabiles Minimum, gilt  $\omega_\alpha^2 > 0$   
 $\omega_\alpha$  ist also reell und damit  $x(t) = v_\alpha e^{i\omega_\alpha t}$  beschränkt.
- Eigenvektoren  $v_\alpha$  können reell gewählt werden.
- Die reellen Eigenvektoren  $v_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$  sind linear unabhängig und bilden Basis des  $R^n$

Beweis:

(i) Aus

$$Kv_\alpha = \omega_\alpha^2 Mv_\alpha \quad \text{folgt} \quad v_\alpha \cdot Kv_\alpha = \omega_\alpha^2 v_\alpha \cdot Mv_\alpha \quad (147)$$

Wegen Reellwertigkeit von  $M$  und  $K$  sind beide Seiten reell:

$$v \cdot Kv = Kv^* \cdot v^* = v^* \cdot Kv^* = (v \cdot Kv)^* \quad (148)$$

Da  $M$  positiv definit, kann man auflösen:

$$\omega_\alpha^2 = \frac{v_\alpha \cdot Kv_\alpha}{v_\alpha \cdot Mv_\alpha} \quad \implies \quad \omega_\alpha^2 \text{ reell} \quad (149)$$

(ii) Gilt  $x^*Kx > 0$ , so folgt  $\omega_\alpha^2 > 0$  und beschränkte Lösung

$$x(t) = v_\alpha e^{i\omega_\alpha t} \quad (150)$$

(iii) Da  $M, K, \omega_\alpha^2$  reell, folgt aus

$$(K - \omega_\alpha^2 M)v_\alpha = 0 \quad (151)$$

$$[(K - \omega_\alpha^2 M)v_\alpha]^* = (K - \omega_\alpha^2 M)v_\alpha^* = 0 \quad (152)$$

Ist  $v_\alpha$  Lösung, so ist auch  $v_\alpha^*$

Aus Lösungen  $v_\alpha$  und  $v_\alpha^*$  bilde Real- und Imaginärteil  $\implies$  Auch  $Re(v_\alpha)$  und  $Im(v_\alpha)$  Eigenvektoren, die nicht gleichzeitig verschwinden können.

Diese stellen reelle Eigenvektoren dar.

(iv) Für reelle Eigenvektoren  $v_\alpha, v_\beta, \alpha \neq \beta$ :

$$\begin{aligned} v_\alpha \cdot Kv_\beta &= \omega_\beta^2 v_\alpha \cdot Mv_\beta \\ v_\alpha \cdot Kv_\beta &= Kv_\alpha \cdot v_\beta = \omega_\alpha^2 Mv_\alpha \cdot v_\beta = \omega_\alpha^2 v_\alpha \cdot Mv_\beta \end{aligned}$$

Damit:

$$(\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2)v_\alpha \cdot Mv_\beta = 0 \quad (153)$$

und somit

$$v_\alpha \cdot Mv_\beta = 0, \quad \text{für } \omega_\alpha^2 \neq \omega_\beta^2 \quad (154)$$

Annahme: Es gelte  $\omega_\alpha^2 \neq \omega_\beta^2$ . Beweis auch ohne wahr, aber aufwendiger

Zu zeigen:  $v_\gamma$  bilden Basis, i.e. sie sind linear unabhängig

Widerspruchsbeweis: Nimm an, sie seien nicht unabhängig

Dann gibt es  $\xi_\gamma \neq 0$ , so dass

$$\sum_{\gamma=1}^n \xi_\gamma v_\gamma = 0 \quad (155)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} v_\alpha \cdot M \left[ \sum_{\gamma=1}^n \xi_\gamma v_\gamma \right] &= 0 = \sum_{\gamma=1}^n \xi_\gamma v_\alpha \cdot Mv_\gamma \\ &= \xi_\alpha v_\alpha \cdot Mv_\alpha \end{aligned}$$

Also  $\xi_\gamma = 0 \forall \gamma$

Damit sind  $v_\gamma, \gamma = 1, \dots, n$  linear unabhängig.

Bilden Basis, da ihre Anzahl =  $n$

Beweis Ende

- Normierung  $\vec{v}_\alpha$

$$v_\alpha \cdot M v_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (156)$$

- Die Lösungen

$$\vec{x}_\alpha(t) = \vec{v}_\alpha e^{i\omega_\alpha t} \quad (157)$$

heißen Eigenschwingungen,  $\omega_\alpha$  heißen Eigenfrequenzen des Systems

Harmonische Schwingungen mit zeitlich konstanten Verhältnissen der einzelnen Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage

- Die allgemeine Lösung :

$$\vec{x}(t) = \sum_{\alpha=1}^n \vec{v}_\alpha (a_\alpha e^{i\omega_\alpha t} + b_\alpha e^{-i\omega_\alpha t}) \quad (158)$$

$a_\alpha$  und  $b_\alpha$  durch Anfangsbedingungen gegeben

- Normalkoordinaten

Führe neue Koordinaten  $Q_\alpha(t)$  ein.

$$\vec{x}(t) = \sum_{\alpha=1}^n Q_\alpha(t) \vec{v}_\alpha \quad (159)$$

Damit gilt auf Grund der Normierung Gl. (156):

$$Q_\alpha(t) = v_\alpha \cdot M x(t) \quad (160)$$

Aus Bewegungsgleichung

$$M\ddot{x} + Kx = 0$$

folgt für  $v_\alpha, \alpha = 1, \dots, n$  :

$$v_\alpha M \ddot{x} + v_\alpha K x = 0 \quad (161)$$

$$\ddot{Q}_\alpha + K v_\alpha x = 0 \quad (162)$$

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 M v_\alpha x = 0 \quad (163)$$

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 v_\alpha M x = 0 \quad (164)$$

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = 0 \quad (165)$$

$\ddot{Q}_\alpha(t) + \omega_\alpha^2 Q_\alpha(t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, n \quad (166)$
---

Bewegungsgleichungen entkoppeln

- Existiert  $\alpha$  mit  $\omega_\alpha = 0$ , i.e.  $v_\alpha K v_\alpha = 0$  so folgt

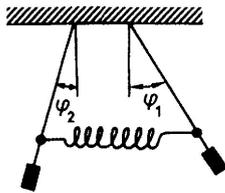
$$\ddot{Q}_\alpha(t) = 0 \quad (167)$$

als lineare Bewegung für diese Normalkoordinate

4. Di. 20

### 4.3 Ein Beispiel

#### Zwei gekoppelte Pendel für kleine Amplituden



- Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l}\varphi_1 + \frac{D}{m}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (168)$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}\varphi_2 + \frac{D}{m}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \quad (169)$$

Matrixformulierung, Massenmatrix  $M$ : Einheitsmatrix

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{D}{m} & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & \frac{g}{l} + \frac{D}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (170)$$

- Exponentialansatz

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \quad (171)$$

- Ergibt Eigenwertgleichung:

$$\begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{D}{m} - \omega^2 & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & \frac{g}{l} + \frac{D}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (172)$$

- Säkulargleichung

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{D}{m} - \omega^2 & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & \frac{g}{l} + \frac{D}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} &= \omega^4 - 2\omega^2 \left( \frac{g}{l} + \frac{D}{m} \right) + \left( \frac{g}{l} + \frac{D}{m} \right)^2 - \left( \frac{D}{m} \right)^2 \\ &= \left( \omega^2 - \frac{g}{l} \right) \left( \omega^2 - \left( \frac{g}{l} + 2\frac{D}{m} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

mit Lösungen

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + 2\frac{D}{m} \quad (173)$$

- Eigenvektoren:

– zu  $\omega_1^2$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{D}{m} & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & +\frac{D}{m} \end{pmatrix} \vec{v} = 0, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (174)$$

– zu  $\omega_2^2$ :

$$\begin{pmatrix} -\frac{D}{m} & -\frac{D}{m} \\ -\frac{D}{m} & -\frac{D}{m} \end{pmatrix} \vec{v} = 0, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (175)$$

- 2 Eigenschwingungen:

–

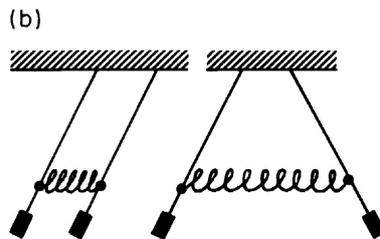
$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t} \quad (176)$$

Pendel schwingen gleichsinnig:  $\varphi_1 = \varphi_2$

–

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t} \quad (177)$$

Pendel schwingen gegensinnig:  $\varphi_1 = -\varphi_2$



- Normalkoordinaten mit Gl. (160):

$$\begin{aligned} Q_1 &= \varphi_1 + \varphi_2 \\ Q_2 &= \varphi_1 - \varphi_2 \end{aligned}$$

Zusammenhang mit Eigenschwingungen offensichtlich da  $M \propto \delta_{ij}$

- Allgemeine Lösung im Reellen

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} a \cos(\omega_1 t + \varphi_0^1) + b \cos(\omega_2 t + \varphi_0^2) \\ a \cos(\omega_1 t + \varphi_0^1) - b \cos(\omega_2 t + \varphi_0^2) \end{pmatrix} \quad (178)$$

$(a, b, \varphi_0^1, \varphi_0^2)$  durch Anfangsbedingungen  $(\varphi_1(0), \dot{\varphi}_1(0), \varphi_2(0), \dot{\varphi}_2(0))$  gegeben.

Lessons learned:

- Um Gleichgewichtspunkte linearisierte Bewegungsgleichungen zeigen Schwingungen
- Harmonisch getriebene gedämpfte lineare Systeme zeigen Resonanz
- Mehr-Körper-Systeme: Orthogonale Eigenschwingungen mit Eigenfrequenzen
- Normalkoordinaten entkoppeln die Bewegungsgleichungen

## 5 Scheinkräfte

- Sei  $S$  Inertialsystem
- Sei  $S'$  System, das mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega = |\vec{\omega}|$  um Richtung  $\vec{\omega}$  relativ zu  $S$  rotiert.  
 $S'$  kein Inertialsystem

- Allgemeine Umrechnung für Ableitungen

Betrachte Vektor  $z$  in  $S$  und entsprechenden Vektor  $z'$  in  $S'$

Erinnere

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (179)$$

Infinitesimale Drehung

$$dz_{rot} = d\varphi \times z' = (\omega dt) \times z' \quad (180)$$

ergibt

$$dz = dz' + dz_{rot} = dz' + (\omega dt) \times z' \quad (181)$$

”Teile” durch  $dt$

$$\dot{z} = \dot{z}' + \omega \times z' \quad (182)$$

- Betrachte Geschwindigkeit

$$\dot{r} = \dot{r}' + \omega \times r' \quad (183)$$

Betrachte Beschleunigung, benutze Gl. (182), beachte  $z = \dot{r}$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} (\dot{r}' + \omega \times r') + \omega \times (\dot{r}' + \omega \times r') \quad (184)$$

$$= \ddot{r}' + 2(\omega \times \dot{r}') + \omega \times (\omega \times r') \quad (185)$$

Falls  $\omega$  zeitabhängig, zusätzlicher Term:  $r \times \dot{\omega}$

- Für Teilchen in Inertialsystem  $S$  gilt

$$m\ddot{r} = F \quad (186)$$

In  $S'$  folgt

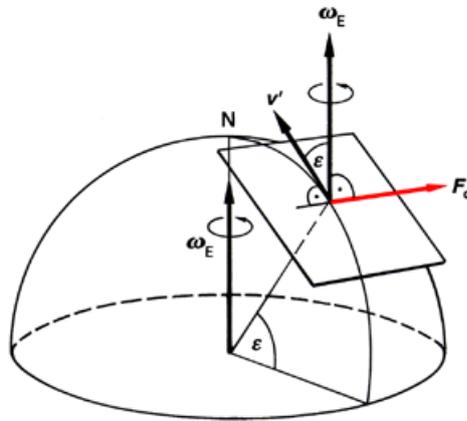
$$m\ddot{r}' = F - 2m\omega \times \dot{r}' - m\omega \times (\omega \times r') \quad (187)$$

Massenpunkt in  $S'$  erfährt außer ”wahrer” Kraft  $F$  noch die Scheinkräfte

- Coriolis-Kraft:  $-2m\omega \times \dot{r}'$
- Zentrifugal-Kraft:  $-m\omega \times (\omega \times r')$

## Coriolis-Kraft

Hängt von Geschwindigkeit in  $S'$  ab



Beispiel: Rotierende Erde

- Hoch- und Tiefdrucksystemen
  - Rechtsabweichung auf Nordhalbkugel
  - Linksabweichung auf Südhalbkugel
  - Drehrichtung von Hoch- und Tiefdrucksystemen
  - Bsp: Tiefdrucksystem



- Vertikale Bewegung: Übung

## 6 Für GenießerInnen

### 6.1 Mechanische Ähnlichkeit

- Sei  $x(t)$  eine Lösung der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{r} + \nabla U(r) = 0 \quad (188)$$

- Nun:
  - Ändere  $m$  um Faktor  $\gamma > 0$
  - Ändere  $U$  um Faktor  $\delta > 0$

und betrachte Lösungen von

$$\gamma m\ddot{r} + \delta \nabla U(r) = 0 \quad (189)$$

- Suche Lösungen  $X(t)$ , die zu  $x(t)$  geometrisch ähnlich sind:

$$X(t) = \alpha x(t/\beta) \quad (190)$$

- $\alpha$ : Streckung der Bahn
- $\beta$ : Streckung der Zeit

- Betrachte zunächst  $\alpha = 1$ , i.e. unterschiedliche Durchlaufzeiten
- Damit  $X(t)$  Gl. (189) löst, muss gelten:

$$\gamma m \ddot{X}(t) + \delta \nabla U(X(t)) = 0 \quad (191)$$

oder

$$(\gamma/\beta^2)m\ddot{x}(t/\beta) + \delta \nabla U(x(t/\beta)) = 0 \quad (192)$$

- Da  $x(t)$  Gl. (188) erfüllt, gilt

$$\frac{\gamma}{\beta^2} = \delta, \quad \beta = \sqrt{\frac{\gamma}{\delta}} \quad (193)$$

Folgerungen:

- Erhöht sich Masse um Faktor  $\gamma$  & bleibt Potential unverändert, so verlangsamt sich Bewegung um  $\sqrt{\gamma}$
- Vergrößert man Potential um  $\delta$  & ändert Masse nicht, so läuft Bewegung um  $\sqrt{\delta}$  schneller ab.

Für Fall  $\alpha \neq 1$  betrachte Potentiale  $U$ , die homogene Funktionen sind.

- Für homogene Funktionen  $f(x)$  vom Grade  $k$  gilt:

$$f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$$

- Aus

$$U(\alpha r) = \alpha^k U(r)$$

folgt

$$\nabla U(\alpha r) = \nabla(U(\alpha r)) \alpha \quad \text{und} \quad \nabla \alpha^k U(r) = \alpha^k \nabla U(r)$$

- Somit:

$$\nabla(U(\alpha r)) = \alpha^{k-1} \nabla U(r)$$

Nun löst  $X(t)$  Gl. (189), wenn (ein  $\alpha$  vom 1. Term)

$$\frac{\gamma}{\beta^2} = \delta \alpha^{k-2}$$

Betrachte  $\gamma = \delta = 1$ : Ähnliche Lösungen der selben Bewegungsgleichung.

$$\beta^2 = \alpha^{2-k}$$

Beispiele:

- Harmonischer Oszillator

$$U(r) \propto r^2, k = 2 \implies \beta = 1$$

Interpretation  $\beta = 1$ : Beim Harmonischen Oszillator ist die Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude

- Kepler-Problem

$$U(r) \propto r^{-1}, k = -1 \implies \beta^2 = \alpha^3$$

Interpretation  $\beta^2 = \alpha^3$ : Kepler III

Lessons learned:

So geht Theoretische Physik:

- Stecke Physik rein, hier Newton II
- Nutze Mathematik, hier Theorie der homogenen Funktionen
- Kriege neue Physik raus, hier Eigenschaften von harmonischem Oszillator und Kepler-Problem

## Part II

# Lagrange'sche Mechanik

## 7 Lagrange Gleichungen 1. & 2. Art

Joseph-Louis Lagrange \* 1736 † 1813

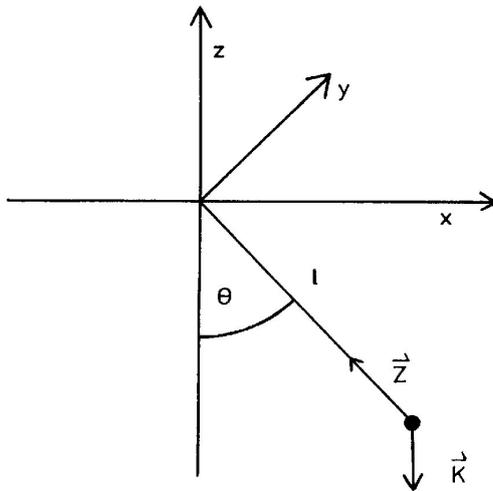
Newtonsche Mechanik: Alle Kräfte müssen bekannt sein.

Häufiger Fall:

- Es sind nicht alle Kräfte bekannt, aber ...
- ... ihre Wirkung
- Konkret: Einschränkung der Bewegung auf gewisse Flächen
- Denke an Achterbahn

Einführendes Beispiel: Pendel

- Betrachte 3D Pendel



Das Pendel mit der Pendellänge  $l$

- Auf Massenpunkt wirken zwei Kräfte:
  - Gravitationskraft  $\vec{F}_G$
  - (Noch) unbekannte Zwangskraft, die Massenpunkt auf Kugelschale  $\vec{r}^2 = l^2$  zwingt.

- Zwangskraft  $\vec{Z}(t)$ :

- Wirkt in Richtung des Aufhängepunktes
- Resultierende Kraft bewirkt Bewegung auf Kugelschale:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_G(\vec{r}) + \vec{Z}(t) \quad (194)$$

- $\vec{Z}(t)$  *a priori* unbekannt
- Aber Wirkung bekannt: Sorgt für  $\vec{r}^2 = l^2$

- Mögliche Orte des Massenpunktes: Zweidimensionale Fläche
  - Bekannte Kraft  $\vec{F}_G$  bewirkt Bewegung auf der Fläche, ...
  - ... auf der  $\vec{Z}(t)$  immer senkrecht stehen muss.

Zwei Ansätze zur Lösung :

- (i) Nutze: Zwangskraft steht senkrecht auf der Fläche

Hier

$$\vec{Z}(t) = \lambda(t)\vec{r} \quad (195)$$

und löse das erweiterte Problem

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_G(\vec{r}) + \lambda(t)\vec{r} \\ \vec{r}^2(t) &= l^2 \end{aligned}$$

Geht, da 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten  $\vec{r}(t)$ ,  $\lambda(t)$ .

Dies ist die Lagrange-Methode 1. Art

Noch nah an Newton: Suchet die Zwangskräfte

(ii) Projiziere die Bewegungsgleichung auf die Fläche

- Finde Vektoren, die tangential zur Fläche liegen.
- Multipliziere Bewegungsgleichung damit
- Eliminiert  $\vec{Z}(t)$ , projiziert Bewegungsgleichung auf die Fläche
- Beste Wahl: "Natürliche" Koordinaten
  - \* Ein Teil parametrisiert frei die Fläche
  - \* Ein Teil hält durch feste Werte die Zwangsbedingung ein

Hier:

- Natürliche Koordinaten: Kugelkoordinaten

$$\vec{r} = r (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, -\cos \theta) \quad (196)$$

\*  $\theta, \varphi$  parametrisieren Fläche

\*  $r$  fixiert Zwangsbedingung

- Aus  $\vec{r}^2(\theta, \varphi) = l^2$  folgt durch Ableiten:

$$\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = 0, \quad \vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = 0 \quad (197)$$

Ergo,  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$  und  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$  spannen den Tangentialraum der Zwangsbedingung auf

- Multiplikation von

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) + \vec{Z}(t) \quad (198)$$

mit  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$  und  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$  ergibt zwei Gleichungen für die freien Variablen:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}}(\theta, \varphi) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}(\theta, \varphi) &= \vec{F}(\vec{r}(\theta, \varphi)) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \\ m\ddot{\vec{r}}(\theta, \varphi) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) &= \vec{F}(\vec{r}(\theta, \varphi)) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

- Zwangskraft läßt sich *post hoc* bestimmen

$$\vec{Z}(t) = m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}(\vec{r}) \quad (199)$$

Dies ist die Lagrange-Methode 2. Art, ergibt völlig selbständigen Formalismus

## 7.1 Lagrange Gleichungen 1. Art

- Betrachte
  - System mit  $N$  Partikeln mit Ortsvektoren  $\vec{r}_i$  zusammengefaßt zu  $\underline{z} \in R^{3N}$ , underscore unterdrückt
  - $s$  unabhängige Zwangsbedingungen ( $F$  wie Fläche)

$$F_\alpha(z) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, s \quad (200)$$

$$r^2 = l^2 \implies r^2 - l^2 = 0$$

- Für jedes  $\alpha$  stellt die Menge

$$M^\alpha = \{z | z \in R^{3N}, F_\alpha(z) = 0\} \quad (201)$$

eine  $(3N - 1)$  dimensionale Fläche, oder auch Mannigfaltigkeit im  $R^{3N}$  dar.

- Mannigfaltigkeit

- "Lokal glatt bündelbar"
- Lokal auf  $R^m$  abbildbar
- Beispiele: Kreisumfang, Kugeloberfläche, Möbiusband
- Lokale Karten, globaler Atlas

- Die Mannigfaltigkeit

$$M = \bigcap_{\alpha=1}^s M^\alpha \quad (202)$$

ist die Menge aller möglichen Lagepunkte.

Sie hat die Dimension:

$$f = 3N - s \quad (203)$$

$f$ : Anzahl der Freiheitsgrade

- Nomenklatur:

- Holonom-skleronome Zwangsbedingungen:  $F_\alpha(z) = 0$
- Holonom-rheonome Zwangsbedingungen:  $F_\alpha(z, t) = 0$
- Nichtholonom:  $F_\alpha(z, \dot{z}, t) = 0$  Fahrrad fahren  
Oder auch Ungleichungen

- Bis auf weiteres: Betrachte nur holonom-skleronome Zwangsbedingungen

- Virtuelle Verrückungen

Tangentialvektoren an  $M$  heißen virtuelle Verrückungen

Formalisierung:

- Jeder Tangentialvektor  $\xi^\alpha$  an  $M^\alpha$  im Punkt  $z_0$  ist darstellbar als:

$$\xi^\alpha = \left. \frac{dz(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} \quad (204)$$

mit  $z(\sigma)$  Kurve in  $M^\alpha$ , die bei  $\sigma = 0$  in  $z_0$  beginnt.

- Aus  $F_\alpha(z(\sigma)) = 0$  folgt

$$\left. \frac{d}{d\sigma} F_\alpha(z(\sigma)) \right|_{\sigma=0} = \left. \frac{dz(\sigma)}{d\sigma} \cdot \nabla F_\alpha(z(\sigma)) \right|_{\sigma=0} = \xi^\alpha \cdot \nabla F_\alpha(z_0) = 0 \quad (205)$$

- Damit: Auf  $M^\alpha$  senkrechte Vektoren sind parallel zu  $\nabla F_\alpha(z)$  und Zwangskraft  $Z(t)$  läßt sich als Linearkombination darstellen:

$$Z(t) = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha(t) \nabla F_\alpha(z) \quad (206)$$

Konkreter:

- Sei  $M$  parametrisiert durch  $f$  Variablen  $q_1, \dots, q_f$ .

Dann ist

- $z(q_1, \dots, q_f) \in M$
- $\partial z / \partial q_i$  eine virtuelle Verrückung, Tangentialvektor an  $M$

- Allgemeine virtuelle Verrückung:

$$\delta z = \sum_{i=1}^f \frac{\partial z}{\partial q_i} \delta q_i = (\delta \vec{r}_1, \dots, \delta \vec{r}_N) \quad (207)$$

$\underline{Z}(t)$  steht senkrecht auf  $M$ , i.e.

$$Z(t) \cdot \delta z = \sum_i \vec{Z}_i(t) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (208)$$

heißt D'Alembert'sches Prinzip ("4. Newtonsches Gesetz").

Bedeutung:

$\vec{Z}_i(t) \cdot \delta \vec{r}_i = [\text{Arbeit}]$ , d.h. Zwangskräfte verrichten keine (virtuelle) Arbeit entlang virtueller Verrückungen.

Lassen sich die Kräfte durch ein Potential ableiten, so gilt zusammenfassend (und allgemein zeitabhängig):

## Lagrange-Gleichungen 1. Art

$$m\ddot{r}_i(t) = -\nabla_i U(r_1(t), \dots, r_N(t), t) + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha(t) \nabla_i F_\alpha(r_1(t), \dots, r_N(t))$$

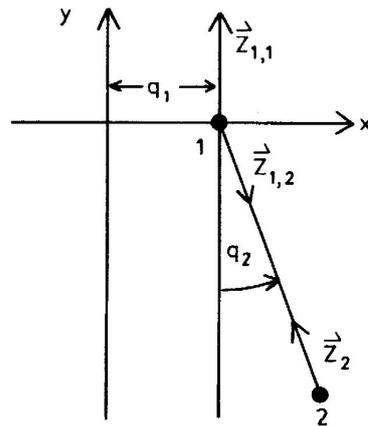
$$F_\alpha(r_1(t), \dots, r_N(t)) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, s$$

$3N + s$  Gleichungen für  $r_1(t), \dots, r_N(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_s(t)$

Technisch sehr wichtig

### 7.1.1 A worked example

- Betrachte
  - 2 Massenpunkte, starr verbunden mit Abstand  $l$
  - Massenpunkt 1 kann sich nur entlang  $x$ -Achse bewegen
  - Betrachte nur Bewegung in  $xy$ -Ebene



Zwei Massenpunkte sind starr durch eine Stange der Länge  $l$  verbunden. Massenpunkt 1 kann sich auf der  $x$ -Achse bewegen. Die Richtung der Zwangskräfte und die verallgemeinerten Koordinaten sind dargestellt

- Mit Koordinaten

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1), \quad \vec{r}_2 = (x_2, y_2) \quad (209)$$

lauten Zwangsbedingungen

$$F_1 = y_1 = 0, \quad F_2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0 \quad (210)$$

- Zwangskräfte:

$$\vec{Z}_1 = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1} \right) (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) \quad (211)$$

$$= (2\lambda_2(x_1 - x_2), \lambda_1 + 2\lambda_2(y_1 - y_2)) \quad (212)$$

$$\vec{Z}_2 = \left( \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_2} \right) (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) \quad (213)$$

$$= (-2\lambda_2(x_1 - x_2), -2\lambda_2(y_1 - y_2)) \quad (214)$$

Vereinfachung durch Koordinaten:  $(x_1, \varphi)$

Dann

$$x_1 = x_1, \quad y_1 = y_1, \quad x_2 = x_1 + l \sin \varphi, \quad y_2 = -l \cos \varphi \quad (215)$$

und Zwangskräfte:

$$\vec{Z}_1 = (-2\lambda_2 l \sin \varphi, \lambda_1 + 2\lambda_2 l \cos \varphi) \quad (216)$$

$$= (0, \lambda_1) - 2\lambda_2 l (\sin \varphi, -\cos \varphi) \quad (217)$$

$$\vec{Z}_2 = 2\lambda_2 l (\sin \varphi, -\cos \varphi) \quad (218)$$

• Interpretation:

- $Z_1$ -Beitrag  $(0, \lambda_1)$  in  $y$ -Richtung hält Teilchen auf  $x$ -Achse.
- Zweiter  $Z_1$ -Beitrag ist entgegengesetzt gleich zu  $Z_2$ : Hält Abstand

Beachte

$$Z_{1x} = -Z_{2x}, \quad Z_{2x}/Z_{2y} = -\tan \varphi \quad (219)$$

• Lagrange Gleichungen 1. Art

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{Z}_1 \quad (220)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{Z}_2 \quad (221)$$

mit Zwangsbedingungen:

$$F_1 = y_1 = 0, \quad F_2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0 \quad (222)$$

damit lösbar.

Lösung:

• Bewegungsgleichungen

$$m_1 \ddot{x}_1 = Z_{1x} \quad (223)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = Z_{1y} - m_1 g \quad (224)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = Z_{2x} \quad (225)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = Z_{2y} - m_2 g \quad (226)$$

Durch  $x_1$  und  $\varphi$  ausgedrückt

$$m_1 \ddot{x}_1 = Z_{1x} \quad (227)$$

$$m_1 \ddot{y} + m_1 g = Z_{1y} \quad (228)$$

$$m_2 (\ddot{x}_1 + l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = Z_{2x} \quad (229)$$

$$m_2 (l\dot{\varphi} \sin \varphi + l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + g) = Z_{2y} \quad (230)$$

Es gilt

$$Z_{1x} = -Z_{2x}, \quad Z_{2x}/Z_{2y} = -\tan \varphi \quad (231)$$

Multipliziere Gl. (229) mit  $\cos \varphi$  und Gl. (230) mit  $\sin \varphi$  und addiere, ergibt

$$\ddot{x}_1 \cos \varphi + l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0 \quad (232)$$

Addition von Gl. (227) und Gl. (229)

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = m_2 l (\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) \quad (233)$$

Einfacherer Weg: Lagrange-Methode 2. Art

- Erinnere

$$x_1 = x_1, \quad y_1 = y_1, \quad x_2 = x_1 + l \sin \varphi, \quad y_2 = -l \cos \varphi \quad (234)$$

Virtuelle Verrückungen:

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x_1} = (1, 0)', \quad \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} = (0, 0)', \quad \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial x_1} = (1, 0)', \quad \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \varphi} = l(\cos \varphi, \sin \varphi)' \quad (235)$$

Multipliziere Bewegungsgleichungen mit virtuellen Verrückungen  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial x_i}$  und  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi}$

Mit

$$\vec{F}_{G_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_i g \end{pmatrix} \quad (236)$$

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x_1} = \vec{F}_{G_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x_1} \quad (237)$$

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} = \vec{F}_{G_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} \quad (238)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial x_1} = \vec{F}_{G_2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial x_1} \quad (239)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \varphi} = \vec{F}_{G_2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \varphi} \quad (240)$$

Addiere Gl. (237) und Gl. (239) :

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x_1} + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial x_1} = \vec{F}_{G_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x_1} + \vec{F}_{G_2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial x_1} \quad (241)$$

ergibt:

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0 \quad (242)$$

mit

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi \quad (243)$$

folgt Gl. (233)

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 = m_2 l (\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) \quad (244)$$

Entsprechend (ohne Vektorpfeile) addiere Gl. (238) und Gl. (240) :

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \varphi} = F_{G_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial \varphi} + F_{G_2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial \varphi} \quad (245)$$

ergibt

$$m_2 \ddot{x}_2 \cos \varphi + m_2 \ddot{y}_2 \sin \varphi = -m_2 g \sin \varphi \quad (246)$$

mit

$$x_2 = x_1 + l \sin \varphi, \quad y_2 = -l \cos \varphi$$

folgt

$$m_2 \cos \varphi (\ddot{x}_1 + l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) + m_2 \sin \varphi (g + l \ddot{\varphi} \sin \varphi + l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) = 0$$

Ergibt Gl. (232)

$$\ddot{x}_1 \cos \varphi + l \ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$$

Technisch einfacher und eleganter als Lagrange 1. Art

- Nichtlineares System: Betrachte kleine und langsame Auslenkungen in  $\varphi$

$$\sin \varphi \approx \varphi \quad (247)$$

$$\cos \varphi \approx 1 \quad (248)$$

$$\dot{\varphi}^2 \quad \text{vernachlässigen} \quad (249)$$

Damit

$$\ddot{x}_1 + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0 \quad (250)$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l\ddot{\varphi} = 0 \quad (251)$$

Gl.(250) nach  $\ddot{x}$  aufgelöst, in Gl.(251) eingesetzt, Terme sortiert, ergibt:

$$\ddot{\varphi} + \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad (252)$$

- Das bedeutet:

$$\varphi(t) = \varphi^0 \cos(\omega(t - t_0)), \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l} \quad (253)$$

$$x_1(t) = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \varphi^0 \cos(\omega(t - t_0)) + \alpha_0 + \alpha_1 t \quad (254)$$

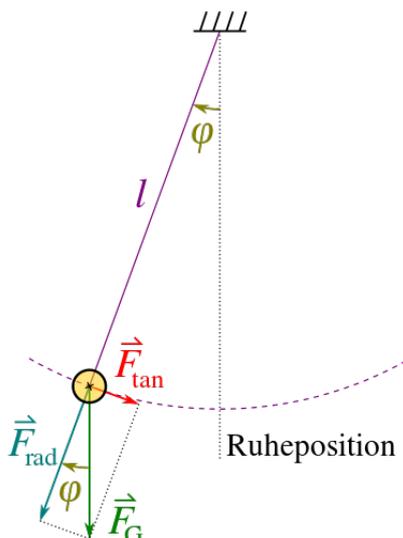
- Interpretation:

- Pendel schwingt mit veränderter Frequenz
- Aufhängepunkt schwingt mit dieser Frequenz
- Für  $m_1 \rightarrow \infty$  wird es wie erwartet, i.e.  $x_1(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ ,  $\omega^2 = g/l$

11 23  
5. Di. 20

## 7.2 Lagrange Gleichungen 2. Art

Idee Lagrange 2. Art: "Projiziere die Bewegungsgleichung auf die Fläche"



- Lagrange 1. Art

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_G + \vec{Z} \\ \vec{r}^2 &= l^2 \end{aligned}$$

- Lagrange 2. Art

Nutze aus, dass gilt

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \cdot \ddot{\vec{r}} = 0$$

Multipliziere Bewegungsgleichung mit Tangentialvektor, projiziert Bewegungsgleichung auf Zwangsbedingung, eliminiert Zwangskraft

$$m \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \cdot (\vec{F}_G + \vec{Z}) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \cdot \vec{F}_G$$

Formalisierung:

- Der Einfachheit halber: holonome Zwangsbedingungen  
Der allgemeine Fall ist nicht-einsichtsreich komplizierter, kommt unten
- Führe geeignete Koordinaten auf  $s$ -dimensionaler Zwangsbedingungsmannigfaltigkeit  $M$  ein:

$$\vec{q} = (q_1, \dots, q_f), \quad f = 3N - s \quad f \text{ Anzahl der Freiheitsgrade}$$

Dann:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(\vec{q}, t)$$

Zwangsbedingungen  $F_\alpha(\underline{z}(t)) = 0$  automatisch erfüllt.

- Betrachte Potentiale statt Kräfte

Allgemeine Formulierung der Bewegungsgleichung im Konfigurationsraum  $\underline{z}$

$$\underline{\dot{p}} = -\underline{\nabla}U(\underline{z}) + \underline{Z} \quad (255)$$

Multipliziere mit Tangentialvektor  $\frac{\partial \underline{z}}{\partial q_j}$

$$\frac{\partial \underline{z}}{\partial q_j} \cdot \underline{\dot{p}} = -\frac{\partial \underline{z}}{\partial q_j} \cdot \underline{\nabla}U(\underline{z}) + \frac{\partial \underline{z}}{\partial q_j} \cdot \underline{Z} \quad (256)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial q_j} U(\underline{z}(q)) \quad (257)$$

Rechte Seite hübsch, mit generalisierten Kraft  $-\frac{\partial}{\partial q_j} U(\underline{z}(q))$

- Wir werden jetzt zeigen, dass für die linke Seite gilt:

$$\frac{\partial \underline{z}}{\partial q_j} \cdot \underline{\dot{p}} \equiv \sum_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (258)$$

Mit der kinetischen Energie  $T$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = T(q, \dot{q}) \quad (259)$$

- Ab jetzt Vektorpfeile unterdrückt und zurück zu  $r_i$  Formulierung
- Vorarbeiten
  - Betrachte Zeitableitung von  $r_i$ :

$$\dot{r}_i = \sum_k \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t} = \dot{r}_i(q, \dot{q}, t)$$

Partielle Ableitung nach  $\dot{q}_j$  ergibt

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad (260)$$

- Ableitungen der kinetischen Energie

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} \quad (261)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (262)$$

Beweis

- Es gilt, geschickt die Null addiert:

$$\frac{\partial z}{\partial q_j} \cdot \dot{p} \equiv \sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - \sum_i m_i \dot{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad (263)$$

- Beachte:
  - Vergleiche zweiten Term in Gl. (263) mit den rechten Seiten von Gln. (261, 262). Bis auf ein paar Punkte sieht das schon ganz gut aus :-). Hat aber ontologisch völlig verschiedenen Ursprünge !
  - Partielle Ableitungen im zweiten Term in Gl. (263) kommen von Projektion auf Zwangsbedingungen.
  - Partielle Ableitungen in Gln. (261, 262) kommen aus der Kettenregel.

Ferner gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d}{dt} r_i = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} \quad (264)$$

Erinnere Gl. (260)

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad (265)$$

- Einsetzen von Gln. (265, 264) in Gl. (263) ergibt mit Gln. (261, 262):

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_i m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (266)$$

Beachte:

- Im vorherigen Beispiel hatten wir die Bewegungsgleichungen in Euklidischen Koordinaten explizit auf die Zwangsbedingung projiziert, siehe Gl. (237) bis Gl. (240), linke Seite von Gl. (266)
- Rechte Seite von Gl. (266) sagt, dass man stattdessen (nur) Ableitungen der kinetischen Energie in den natürlichen Koordinaten auszurechnen braucht.
- Das ist tief ! Und sehr praktisch :-)
- Gl. (257): Linke Seite = rechte Seite

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (267)$$

Das legt nahe eine Größe

$$L = T - U \quad (268)$$

einzuführen

$f$  Differentialgleichungen 2. Ordnung für die  $q_j(t)$ : Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, f \quad (269)$$

mit Lagrange-Funktion

$$L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = T(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) - U(q_1, \dots, q_f, t) \quad (270)$$

Gegeben  $T$  und  $U$  ist Lagrange-Funktion bekannt.

Wichtig:

- Keine Kräfte in  $\mathbb{R}^{3N}$  oder  $\mathbb{R}^f$  mehr, ...
- ... sondern skalare Energien

⇒ Sehr viel einfacher zu berechnen

Liegen keine Zwangskräfte vor, so können  $q_i$  auch kartesische Koordinaten sein

$$L(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \quad (271)$$

- Dann ist

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{d}{dt} m_i \dot{\vec{r}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i \quad (272)$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \quad (273)$$

- Somit sind Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (274)$$

identisch mit Newtonscher Bewegungsgleichung

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \quad (275)$$

### 7.2.1 Energieerhaltung

- Im allgemeinen kann Lagrange-Funktion auch explizit von der Zeit abhängen

$$L = L(q, \dot{q}, t) \quad (276)$$

- Betrachte folgende Zeitableitungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i &= \sum_{i=1}^f \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \end{aligned}$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \quad (277)$$

- Differenz ergibt:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (278)$$

Folgt Erhaltungssatz:

$$\text{Wenn } \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \text{dann} \quad \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad \text{erhalten} \quad (279)$$

- Hängen Zwangsbedingungen nicht von Zeit ab, gilt

$$\dot{r}_i = \sum_k \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \dot{r}_i(q, \dot{q}) \quad (280)$$

Kinetische Energie in kartesischen Koordinaten:

$$T(\dot{r}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 \quad (281)$$

$\dot{r}_i(q, \dot{q})$  eingesetzt

$$T(q, \dot{q}) = \sum_{k,l}^f \frac{1}{2} m_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l \quad (282)$$

und damit

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T \quad (283)$$

- Somit folgt

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - (T - U) = E \quad (284)$$

Hängt Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit ab, ist die Energie erhalten.

### 7.2.2 Kanonisch konjugierte oder verallgemeinerte Impulse und zyklische Koordinaten

Definition:

- Die Größen

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (285)$$

heißen kanonisch konjugierte oder verallgemeinerte Impulse.

- Motivation:

Für

$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - U(r) \quad \text{folgt} \quad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m \dot{\vec{r}} \quad (286)$$

- Wird bei Hamiltonscher Mechanik, Kapitel 11 zentral
- Koordinate  $q_i$ , von der  $L$  nicht abhängt, heißt zyklisch.

Wegen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (287)$$

gilt

Der verallgemeinerte Impuls einer zyklischen Koordinate ist erhalten

Das ist in der Newtonschen Mechanik so nicht möglich.

Lessons learned:

- Zwangsbedingungen lassen sich durch Newton schwer behandeln
- Lagrange 1. Art: Integriere Zwangskräfte in Newtonsche Bewegungsgleichungen
- Lagrange 2. Art: Projiziere Bewegungsgleichungen auf Zwangsbedingungen
- Führt zu Lagrangefunktion und Lagrangeschen Bewegungsgleichungen
- Lagrange 2. Art rechnet mit Energie statt mit Kräften
- Hängt die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit ab, ist die Energie erhalten
- Hängt die Lagrangefunktion von einer Koordinate nicht ab, so heisst diese zyklisch, und der zugehörige kanonisch konjugierte Impuls ist erhalten.

12 23

## 8 Anwendungen

### 8.1 Newton revisited

Beispiel:

Näherungen analog Kapitel 4 Lineare Schwingungen

- Lagrange-Funktion:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{ij} g_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q) \quad (288)$$

- Punkt  $q^0$  heißt Gleichgewichtspunkt, wenn die (triviale) Bahnkurve  $q(t) = q^0$ ,  $\dot{q}(t) = 0$  Lösung der Bewegungsgleichungen ist
- Es gilt  
 $q_0$  Gleichgewichtspunkt, genau dann wenn

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{q^0} = 0 \quad (289)$$

Begründung:

Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (290)$$

Für  $\dot{q}(t) = 0$ , da  $\partial T / \partial \dot{q}_i$  und  $\partial T / \partial q_i$  noch von  $\dot{q}_i$  abhängen, bleibt nur die Behauptung

- In Nähe des Gleichgewichtes:  $q_i = q^0 + \eta_i$

- Dann

$$\begin{aligned}
 U(q_1, \dots, q_f) &= U(q_1^0, \dots, q_f^0) + \sum_i \left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{q^0} \eta_i \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q^0} \eta_i \eta_j + O(\eta^3) \\
 &\approx U(q^0) + \frac{1}{2} \sum_{ij} K_{ij} \eta_i \eta_j
 \end{aligned}$$

mit

$$K_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q^0} \quad (291)$$

- Analog mit  $\dot{q}_i = \dot{\eta}_i$  in quadratischer Näherung

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \approx \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij}(q^0) \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j \quad (292)$$

- Damit Lagrange-Funktion des "quadratisierten" Systems:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - K_{ij} \eta_i \eta_j \quad (293)$$

mit Bewegungsgleichung

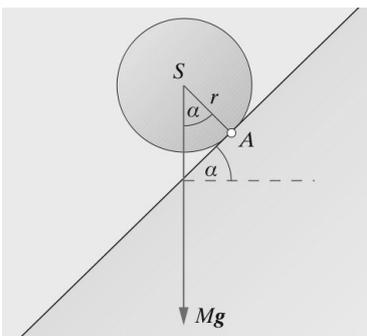
$$\sum_j M_{ij} \ddot{\eta}_j + K_{ij} \eta_j = 0, \quad \forall i \quad (294)$$

Normalkoordinaten:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - K_{ij} \eta_i \eta_j = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^f \dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2 \quad (295)$$

- Jedes Newton-Problem ist in Lagrange formulierbar.

## 8.2 Lagrange 1. vs. 2. Art: Schiefe Ebene



Lagrange 1. Art

- Zwangsbedingung:

$$F(x, y) = x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0 \quad (296)$$

Zwangskraft

$$\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} F = \lambda \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} \quad (297)$$

Lagrange Gleichungen 1. Art

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\vec{e}_y + \lambda \vec{\nabla} F \quad (298)$$

In Komponenten:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda \sin \alpha \\ m\ddot{y} &= -mg - \lambda \cos \alpha \end{aligned}$$

- Elimination von  $\lambda$ <sup>6</sup>

Zweifache Differentiation von  $F(x, y)$  nach der Zeit

$$\ddot{x} \sin \alpha - \ddot{y} \cos \alpha = 0 \quad (299)$$

Multiplikation mit  $m$

$$m\ddot{x} \sin \alpha - m\ddot{y} \cos \alpha = 0 \quad (300)$$

Einsetzen der Bewegungsgleichungen

$$\lambda \sin^2 \alpha + mg \cos \alpha + \lambda \cos^2 \alpha = 0 \quad (301)$$

Ergibt

$$\lambda = -mg \cos \alpha \quad (302)$$

- In Bewegungsgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg \cos \alpha \sin \alpha \\ m\ddot{y} &= -mg + mg \cos^2 \alpha = -mg \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

- Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 \cos \alpha \sin \alpha + a_1 t + a_2 \\ y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 \sin^2 \alpha + b_1 t + b_2 \end{aligned}$$

Zwangskraft:

$$Z = \lambda \vec{\nabla} F = -mg \cos \alpha \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix}, \quad |Z| = mg \cos \alpha \quad (303)$$

Mit

$$\begin{aligned} x(t) &= s(t) \cos \alpha \\ y(t) &= s(t) \sin \alpha \end{aligned}$$

Bewegung auf der Ebene

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha + v_0 t + s_0 \quad (304)$$

---

<sup>6</sup>Typischer Trick neben den geometrischen Überlegungen in Kap. 7.1.1 A worked example

## Lagrange 2. Art

- Wähle  $s$  als verallgemeinerte Koordinate

$$x(t) = s(t) \cos \alpha \quad y(t) = s(t) \sin \alpha \quad (305)$$

- Aus

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad \text{und} \quad U = mgy \quad (306)$$

folgt

$$L(s, \dot{s}) = T - U = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - mgs \sin \alpha \quad (307)$$

- Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = 0, \quad (308)$$

gibt Bewegungsgleichung

$$m\ddot{s} = -mg \sin \alpha \quad (309)$$

- Lösung

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha + v_0 t + s_0 \quad (310)$$

- Da  $L$  nicht explizit von Zeit abhängt, gilt Energieerhaltung

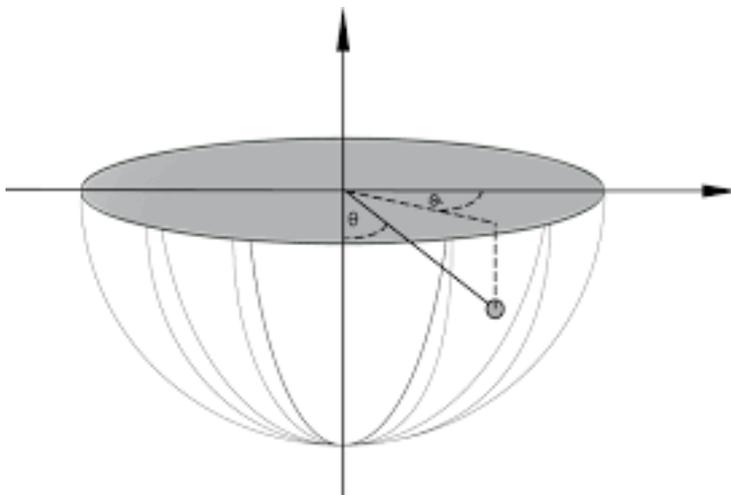
$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{s}^2(t) + mgs(t) \sin \alpha = \text{const} \quad (311)$$

6. Di. 20

## 8.3 Das sphärische Pendel

- Mathematisches Pendel in 3 Dimensionen mit  $\vec{r} = (x, y, z)$
- Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= -r \cos \theta \end{aligned}$$



Zwangsbedingung:  $r = l, \vec{r} = \vec{r}(\theta, \varphi)$

- Zeitableitung

$$\dot{\vec{r}} = l \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \\ \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \\ \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (312)$$

Damit:

$$\dot{\vec{r}}^2 = l^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \quad (313)$$

Folglich:

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - mgl(1 - \cos \theta) \quad (314)$$

Bewegungsgleichung für  $\theta$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (315)$$

$$ml^2(\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) + mgl \sin \theta = 0 \quad (316)$$

- Bewegungsgleichung für  $\varphi$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}(ml^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta) = 0, \quad (317)$$

$\varphi$  zyklisch, da  $L$  nicht von  $\varphi$  abhängt.

Es folgt: Der kanonisch konjugierte Impuls

$$p_\varphi = ml^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta \quad (318)$$

ist erhaltene Größe.

Ergibt Erstes Integral für  $\varphi$ .

- Interpretation  $p_\varphi$ :

Betrachte  $z$ -Komponente des Drehimpulses:

$$\begin{aligned} L_z &= m(xy\dot{z} - z\dot{y}x) \\ &= ml^2(\sin \theta \cos \varphi(\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi) - \sin \theta \sin \varphi(\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi)) \\ &= ml^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta \\ &= p_\varphi \end{aligned}$$

Anschauung: Auf  $z$ -Komponente des Drehimpulses kann Gravitation kein Drehmoment ausüben

- Setze

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{L_z^2}{m^2 l^4 \sin^4 \theta} \quad (319)$$

in Bewegungsgleichung für  $\theta$ , Gl. (316), ein:

$$m l^2 \ddot{\theta} - \frac{L_z^2}{m l^2 \sin^3 \theta} \cos \theta + m g l \sin \theta = 0 \quad (320)$$

Multipliziere mit  $\dot{\theta}$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{L_z^2}{2 m l^2 \sin^2 \theta} - m g l \cos \theta \right) = 0 \quad (321)$$

- Andererseits Energie

$$E = T + U = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + m g l (1 - \cos \theta) \quad (322)$$

Für den zweiten Term wiederum Gl. (319) einsetzen, ergibt

$$E = T + U = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{L_z^2}{2 m l^2 \sin^2 \theta} + m g l (1 - \cos \theta) \quad (323)$$

Also Energie erhalten.

Ergibt Erstes Integral für  $\theta$ .

Lösung der Bewegungsgleichungen:

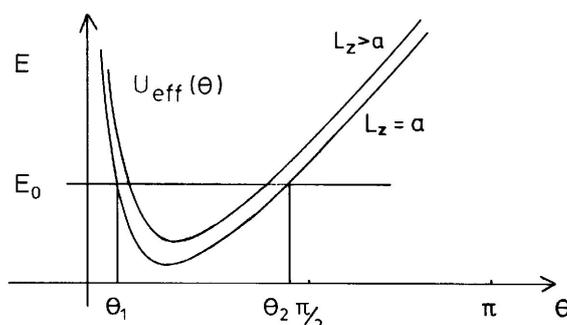
- Déjà vu Zwei-Körper-Problem
- Berechne  $\theta(t)$  aus Gl. (323)
- Berechne  $\varphi(t)$  aus Gl. (318)
- Ist aber sehr technisch

Qualitative Diskussion:

- Effektives Potential

$$E = T + U_{eff}, \quad U_{eff}(\theta) = \frac{L_z^2}{2 m l^2 \sin^2 \theta} - m g l (1 - \cos \theta) \quad (324)$$

$\varphi$ -Einfluß über  $L_z$



Darstellung von  $U_{eff}(\theta)$  für verschiedene  $L_z$ . Das Minimum liegt bei  $\theta$ -Werten kleiner  $\pi/2$ . Bei vorgegebenem  $E_0$  und  $L_z \neq 0$  kann  $\theta$  zwischen  $\theta_1$  und  $\theta_2$  oszillieren

- $L_z \neq 0$ 
  - $U_{eff}(\theta)$  singularär für  $\theta = 0$  und  $\theta = \pi$
  - Minimum:  $\theta_0 < \pi/2$
  - $\theta$  oszilliert zwischen  $\theta_1$  und  $\theta_2$
  - Minimales  $E$  bei gegebenem  $L_z \neq 0$ : Kreisbewegung mit  $\theta = \theta_0$  und Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z}{ml^2 \sin^2 \theta_0}$$

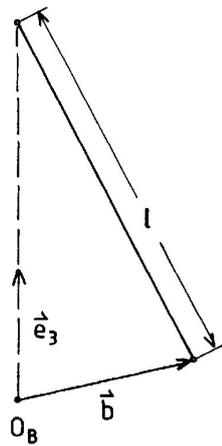
- Ist  $L_z = 0$ , so  $\dot{\varphi} = 0 \implies$  ebenes Pendel

6. Do. 20  
13 23

Übung: Jojo

## 8.4 Foucault'sches Pendel

- Betrachte Pendel in erdfestem (Nicht-Inertial) System: Foucault'sches Pendel (Panthéon, Paris, 1851)



Das Foucaultsche Pendel. Der Bezugspunkt  $O_B$  sei in der Ruhelage des Pendels

- Scheinkräfte revisited, Kapitel 5

$$\dot{r} = \dot{r}' + \omega \times r' \quad (325)$$

- $\dot{r}^2$ :

$$\dot{r}^2 = v'^2 + 2v\omega \times r' + (\omega \times r')^2 \quad (326)$$

Letzter Term  $\propto \omega^2$  klein: vernachlässigen

- Lagrange Funktion (alle Striche unterdrückt)

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + mv(\omega \times r) - U(r) \quad (327)$$

mit

$$U(r) = -m\vec{g} \cdot \vec{r} \quad (328)$$

- Mit

$$\vec{r} = (x, y, z) \quad (329)$$

und Ursprung in der Ruhelage des Pendels folgt Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m\omega_x(y\dot{z} - z\dot{y}) + m\omega_y(z\dot{x} - x\dot{z}) + m\omega_z(xy - yx) - mgz \quad (330)$$

- Mit

$$x^2 + y^2 + (z - l)^2 = l^2 \quad (331)$$

Auflösen nach  $z$ , folgt mit Taylorentwicklung der Wurzel

$$z = l - \sqrt{l^2 - x^2 - y^2} \quad (332)$$

$$= l - l\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}} \quad (333)$$

$$\text{Taylorentwicklung: } \sqrt{1 - u} = 1 - \frac{1}{2}u + \dots \quad (334)$$

$$= l - l\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2} + \dots\right) \quad (335)$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{2l} + O\left(\frac{x^4}{l^3}\right) + O\left(\frac{y^4}{l^3}\right) \quad (336)$$

- Sehr langes Pendel im Verhältnis zur Auslenkung in  $x$  und  $y$  : vernachlässige

$$\frac{x^4}{l^3}, \frac{y^4}{l^3} \text{ und Terme höherer Ordnung} \quad (337)$$

$z$ , resp.  $\dot{z}$  ist klein im Verhältnis zu  $x$  und  $y$ , resp.  $\dot{x}$  und  $\dot{y}$ , vernachlässige Terme

$$\dot{z}^2, \quad z\dot{y}, \quad z\dot{x}, \quad \dot{z}y, \quad \dot{z}x \quad (338)$$

- Ergibt für Lagrangian, um diese übliche Bezeichnung auch mal einzuführen

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\omega_z(xy - yx) - \frac{mg}{2l}(x^2 + y^2) \quad (339)$$

- Lagrange Gleichungen geben Bewegungsgleichungen für  $x$  &  $y$ :

$$m\ddot{x} - m\omega_z\dot{y} - m\omega_z\dot{y} + m\frac{g}{l}x = 0$$

$$m\ddot{y} + m\omega_z\dot{x} + m\omega_z\dot{x} + m\frac{g}{l}y = 0$$

oder

$$\ddot{x} - 2\omega_z\dot{y} + \frac{g}{l}x = 0$$

$$\ddot{y} + 2\omega_z\dot{x} + \frac{g}{l}y = 0$$

Setze  $u = x + iy$

$$\ddot{u} + 2i\omega_z\dot{u} + \frac{g}{l}u = 0 \quad (340)$$

Beachte:  $2i\omega_z\dot{u}$  kein Reibungsterm, da komplex

- Erinnere Kapitel 4 Lineare Schwingungen

Exponentialansatz:  $u = e^{i\nu t}$

- Ergibt:

$$-\nu^2 - 2\omega_z\nu + \frac{g}{l} = 0 \quad (341)$$

oder

$$\nu = -\omega_z \pm \sqrt{\omega_z^2 + \frac{g}{l}} \quad (342)$$

- Da  $\omega_z^2 \ll \frac{g}{l}$

$$\nu = -\omega_z \pm \sqrt{\omega_z^2 + \frac{g}{l}} = -\omega_z \pm \hat{\omega}, \quad \hat{\omega} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (343)$$

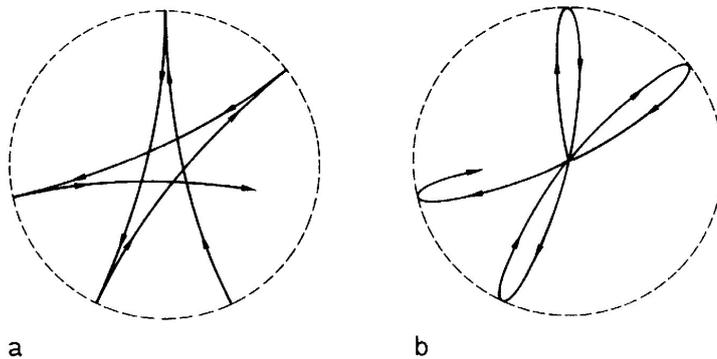
also:

$$u(t) = e^{-i\omega_z t} (c_1 e^{i\hat{\omega} t} + c_2 e^{-i\hat{\omega} t}) \quad (344)$$

$c_1, c_2$  aus Anfangsbedingungen

Interpretation:

- Für  $\omega_z = 0$ , ergäbe das einfache, ebene Schwingung
- Mit  $\omega_z \neq 0$  dreht sich Schwingungsebene
- Ablenkung auf Nordhalbkugel immer nach rechts



**Die Bahnen des Foucaultschen Pendels (schematisch).**  
Das Pendel wird auf der Nordhalbkugel durch die Corioliskraft stets nach rechts abgelenkt. **(a)** Form der Bahnen, wenn das Pendel zur Zeit  $t = t_0$  ruht und aus dem oberen Totpunkt losgelassen wird. **(b)** Form der Bahnen, wenn das Pendel zur Zeit  $t = t_0$  aus der Ruhelage heraus angestoßen wird

- Stärke des Effekts:  $\omega_z = \vec{\omega} \vec{e}_3 = |\omega| \sin$  (geographische Breite)  
 $T=1 \text{ Tag} / \sin$  (geographische Breite)
  - Nordpol: Eine Drehung pro Tag
  - Äquator: Kein Effekt
  - Freiburg: Eine Drehung in 1.3 Tagen
  - Mythos: Badewannenausfluss

Lessons learned:

- Lagrange 2. Art erleichtert das Leben gegenüber 1. Art
- Zyklische Variablen schenken uns Erhaltungsgrößen und Erste Integrale
- Foucaultsches Pendel (Paris, 1851) weist Erddrehung explizit nach

7. Di. 20

## 9 Der starre Körper

- Bisher: Mechanik von Massenpunkten
- Nicht angemessen, wenn Ausdehnung relevante Rolle spielt.
- Beispiel: Rollendes Rad
- (Weniger) idealisiertes System: Der starre Körper
- Erst einmal: Starrer Körper =  $N$  Punktteilchen
- Starrer Körper: Holonom-skleronome Zwangbedingungen:

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| - C_{ij} = 0 \quad (345)$$

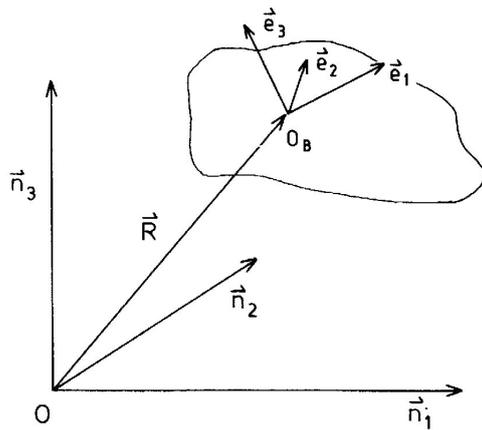
### 9.1 Kinematik

Konfigurationsraum:

- Körperfestes Koordinatensystem
  - Wähle Punkt  $O_B$  im Körper, kluge Punkte: Schwerpunkt, Kreisel: Fußpunkt
  - Verankere dort orthonormales Koordinatensystem  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$
  - Punkt  $X$  des Körpers:

$$O_B \vec{X} = \vec{b} = \sum_i b_i \vec{e}_i \quad (346)$$

- $\dot{b}_i = 0$  wegen Starrheit des Körpers
- Inertialsystem
  - Ursprung  $O$
  - Orthonormales Koordinatensystem  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$
  - Sei  $\vec{R} = O\vec{O}_B$



**Raumfestes Inertialsystem und körperfestes System mit den Basisvektoren  $e_1, e_2, e_3$**

Damit

$$\vec{OX} =: \vec{r}(t) = \vec{R} + \sum_i b_i \vec{e}_i(t) \quad (347)$$

Drücke  $\vec{e}_i(t)$  durch  $\vec{n}_i$  aus

$$\vec{e}_i(t) = \sum_j \vec{n}_j D_{ji}(t) \quad (348)$$

Somit

$$\vec{b}(t) = \sum_i b_i \vec{e}_i(t) = \sum_{ij} \vec{n}_j D_{ji}(t) b_i \quad (349)$$

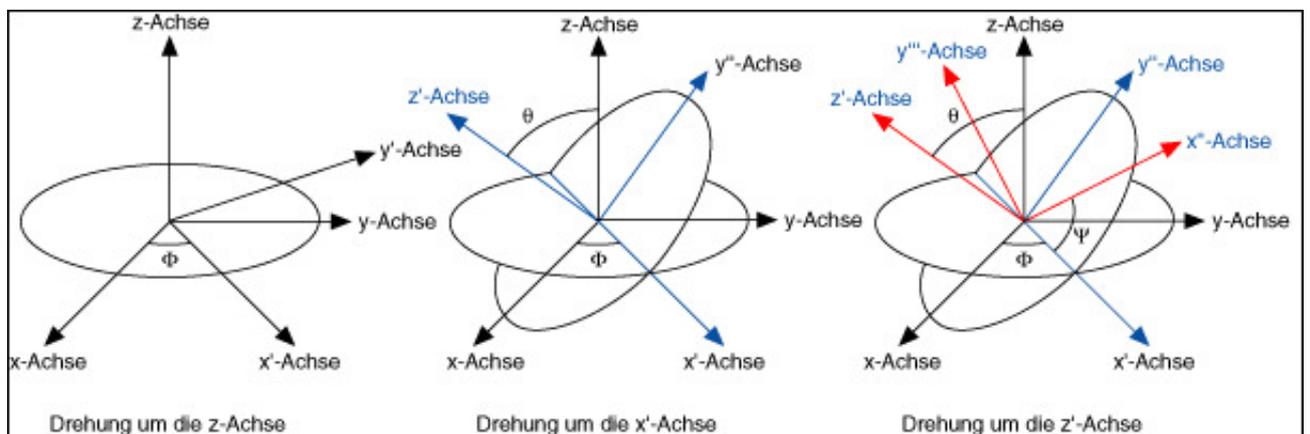
Lage des starren Körpers gegeben durch:

- Ortsvektor  $\vec{R}(t)$
- Drehung  $D(t)$ , die  $\vec{n}_i$  in  $\vec{e}_i(t)$  überführt

Eigenschaften von Drehmatrizen

- $DD^T = D^T D = \mathbb{1}, D^{-1} = D^T$
- $\det D = 1$ : Volumenerhaltend

Parametrisierung der Drehung, die  $\vec{n}_i$  in  $\vec{e}_i(t)$  überführt.



FReiburg Euler Winkel Demonstrations Apparat (FREUWDA)

(i) Drehung um  $\vec{n}_3$  um Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi)$

Zugehörige Drehmatrix  $R_{ji}^3$

$$n'_i = \sum_j n_j R_{ji}^3(\varphi) \quad (350)$$

$$\begin{aligned} n'_1 &= \cos \varphi n_1 + \sin \varphi n_2 \\ n'_2 &= -\sin \varphi n_1 + \cos \varphi n_2 \\ n'_3 &= n_3 \end{aligned}$$

Ergo:

$$R^3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (351)$$

Check:  $R^3 R^{3T} = \mathbb{1}$ ,  $\det R^3 = 1$

(ii) Drehung um  $\vec{n}'_1$  um Winkel  $\theta \in (0, \pi)$

$$R^1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (352)$$

(iii) Drehung um  $\vec{n}''_3$  um Winkel  $\psi \in (0, 2\pi)$  mit  $R^3(\psi)$

Zusammengefaßt:

$$e_i = \sum_{rkj} n_r R_{rk}^3(\varphi) R_{kj}^1(\theta) R_{ji}^3(\psi) = \sum_r n_r D_{ri}(\varphi, \theta, \psi) \quad (353)$$

Diese Winkel  $\varphi, \theta, \psi$ , die jede Drehung parametrisieren, heißen Eulersche Winkel

- Natürlich alles zeitabhängig

$$\vec{e}_i(t) = \sum_r \vec{n}_r D_{ri}(\varphi(t), \theta(t), \psi(t)) \quad (354)$$

- Geschwindigkeit

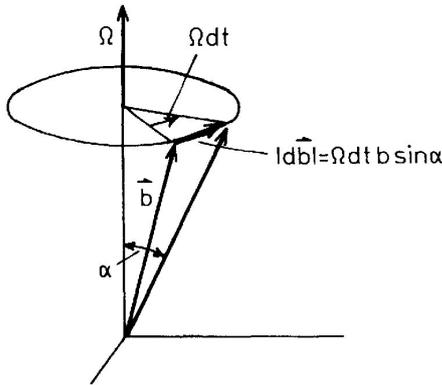
$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{R}}(t) + \sum_i b_i \dot{\vec{e}}_i(t) = \dot{\vec{R}}(t) + \sum_{ij} n_j \dot{D}_{ji}(t) b_i \quad (355)$$

- Es existiert Winkelgeschwindigkeitsvektor  $\vec{\Omega}(t)$ , so daß gilt

$$\dot{\vec{e}}_i(t) = \vec{\Omega}(t) \times \vec{e}_i(t) \quad (356)$$

Interpretation:

- $\vec{\Omega}$  gibt Richtung der Drehachse an
- $|\vec{\Omega}|$  die Geschwindigkeit



Der Vektor  $\Omega$  gibt die Richtung der Achse an, um die sich der Punkt  $b$  momentan dreht und  $|\Omega|$  gibt die Winkelgeschwindigkeit der Drehung an

In Eulerschen Winkeln ausgedrückt:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \\ \Omega_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \\ \Omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta\end{aligned}$$

Beweis als Übung

Der Konfigurationsraum

- Die Menge aller Drehungen bildet eine Gruppe, die mit  $SO(3)$  bezeichnet wird  
 $SO(3)$ : Speziell orthogonal im 3-dimensionalen.  
"Unspeziell" wäre mit Spiegelungen, heißt  $O(3)$
- Der Konfigurationsraum  $M$  eines starren Körpers ist somit

$$M = SO(3) \times \mathbb{R}^3 \quad (357)$$

14 23

## 9.2 Kinetische Energie & Trägheitstensoren

Geschwindigkeit für Punkt  $i$  des Körpers

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}} + \sum_j b_{ij} \dot{\vec{e}}_j = \dot{\vec{R}} + \sum_j b_{ij} (\vec{\Omega} \times \vec{e}_j) = \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{b}_i \quad (358)$$

Damit kinetische Energie:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{r}}_i^2 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{b}_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{R}}^2 + \sum_i m_i \dot{\vec{R}} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{b}_i) + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\Omega} \times \vec{b}_i)^2\end{aligned}$$

Mit

$$M = \sum_i m_i, \quad (359)$$

$$\dot{\vec{R}} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{b}_i) \equiv (\dot{\vec{R}} \times \vec{\Omega}) \cdot \vec{b}_i \quad (360)$$

und

$$(\vec{\Omega} \times \vec{b}_i)^2 = \vec{\Omega}^2 \vec{b}_i^2 \sin^2 \alpha = \vec{\Omega}^2 \vec{b}_i^2 (1 - \cos^2 \alpha) = \vec{\Omega}^2 \vec{b}_i^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{b}_i)^2 \quad (361)$$

folgt

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + (\dot{\vec{R}} \times \vec{\Omega}) \cdot \sum_i m_i \vec{b}_i + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\Omega}^2 \vec{b}_i^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{b}_i)^2) \quad (362)$$

1. Term

- Schwerpunktsbewegung

2. Term verschwindet, wenn

- $O_B$  im Schwerpunkt, wegen  $\sum_i m_i \vec{b}_i = 0$

oder

- Körper in  $O_B$  fixiert, da  $\dot{\vec{R}} = 0$ . z.B. Fußpunkt Kreisel

3. Term

- Mit Trägheitstensor  $I_{mn}$

$$I_{mn} = \sum_i m_i (\delta_{mn} \vec{b}_i^2 - b_{i_m} b_{i_n}), \quad n, m = 1, 2, 3 \quad (363)$$

gilt

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\Omega}^2 \vec{b}_i^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{b}_i)^2) = \frac{1}{2} \sum_{mn} \Omega_m I_{mn} \Omega_n \quad (364)$$

Argument:

$$\vec{\Omega}^2 \vec{b}^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{b})^2 = \sum_n \Omega_n^2 \vec{b}^2 - \sum_{mn} \Omega_m b_m \Omega_n b_n = \sum_{mn} (\delta_{mn} \vec{b}^2 - b_m b_n) \Omega_m \Omega_n \quad (365)$$

Damit folgt für kinetische Energie,  $O_B$  im Schwerpunkt:

$$\begin{aligned} T &= T_S + T_{rot} \\ T_S &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 \\ T_{rot} &= \frac{1}{2} \Omega_m I_{mn} \Omega_n \end{aligned}$$

Bei kontinuierlicher Massenverteilung mit Dichte  $\rho(\vec{b})$ :

$$I_{mn} = \int_V d^3b \rho(\vec{b}) (\delta_{mn} \vec{b}^2 - b_m b_n) \quad (366)$$

Etwas abstrakter:

- In

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \Omega_m I_{mn} \Omega_n, \quad \text{Einstein'sche Summenkonvention} \quad (367)$$

ist  $I_{mn}$  eine Bilinearform:  $V^3 \times V^3 \mapsto \mathbb{R}$

- Operator:  $I(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) \mapsto \mathbb{R}$
- Anschaulich: Betrachte Matrix: Frißt zwei Vektoren, spuckt eine Zahl aus.
- Damit

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) \quad (368)$$

7. Do. 20

Bemerkungen

- (i) Erfolgt Drehung um feste Achse in Richtung Einheitsvektor  $\vec{n}$ , so ist

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{n} \quad (369)$$

und damit

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \Omega^2 n_i I_{ij} n_j = \frac{1}{2} I_{\vec{n}} \Omega^2 \quad (370)$$

$I_{\vec{n}}$ : Trägheitsmoment des starren Körpers bezüglich Achse  $\vec{n}$ .

Trägheitstensor bestimmt also die Trägheitsmomente für alle möglichen Achsen durch  $O_B$

- (ii) Diagonalisierung:

- Lineare Algebra: Jede symmetrische, positiv semi-definite Bilinearform (Matrix) kann durch orthogonale Transformation diagonalisiert werden.
- Konkret:  
Es existiert orthonormale Basis  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  so dass

$$\begin{aligned} I(\vec{e}_i, \vec{e}_j) &= 0, & \text{für } i \neq j \\ I(\vec{e}_i, \vec{e}_i) &\geq 0 \end{aligned}$$

Vektoren  $\vec{e}_i$  heißen Hauptträgheitsachsen

- Geschickt: Identifiziere körperfeste Basis mit Hauptträgheitsachsen.

Dann

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (371)$$

- In der Regel: Symmetrie des Körpers legt Hauptträgheitsachsen fest.
  - \* Wenn Körper symmetrisch unter Spiegelung an Ebene mit Normalenvektor  $\vec{n}$ , so ist  $\vec{n}$  eine Hauptträgheitsachse und die anderen liegen in Ebene.
  - \* Wenn Körper symmetrisch unter Drehungen um Achse  $\vec{n}'$ , so ist  $\vec{n}'$  Hauptträgheitsachse und die beiden anderen Hauptträgheitsmomente sind gleich.

Trägheitstensor homogene Kugel, Dichte  $\rho$ , Radius  $R$   
Erinnere

$$I_{mn} = \int_V d^3b \rho(\vec{b})(\delta_{mn}b^2 - b_m b_n) \quad (372)$$

$$I_{11} = \sum_i m_i (b_{i2}^2 + b_{i3}^2) = \int_V d^3b \rho(\vec{b})(b_2^2 + b_3^2) \quad (373)$$

Für Kugel: Kugelkoordinaten  $d^3b = dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$

$$\begin{aligned} I_{11} + I_{22} + I_{33} &= 3I_1 \\ &= \int_r \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \rho (2b_1^2 + 2b_2^2 + 2b_3^2) \\ &= 4\pi \rho \int_0^R dr r^2 (2b_1^2 + 2b_2^2 + 2b_3^2) \\ &= 8\pi \rho \int_0^R dr r^4 = \frac{8\pi}{5} \rho R^5 \end{aligned}$$

Also mit Kugelmasse  $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{8\pi}{15} \rho R^5 = \frac{2}{5} MR^2 \quad (374)$$

Übung: Trägheitstensoren ausrechnen

### 9.3 Drehimpuls, Eulersche Kreiselgleichungen, freier symmetrischer Kreisel

- Betrachte Drehimpuls bezüglich körperfestem Bezugspunkt  $O_B$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i \vec{b}_i \times m_i \dot{\vec{b}}_i = \sum_i m_i \vec{b}_i \times (\vec{\Omega} \times \vec{b}_i) \\ &= \sum_i m_i [\vec{\Omega} b_i^2 - \vec{b}_i (\vec{\Omega} \cdot \vec{b}_i)] \\ &= \sum_{jk} \vec{e}_j(t) I_{jk} \Omega_k(t) = \sum_j L_j(t) \vec{e}_j(t) \end{aligned}$$

Ergo:

$$L_j = \sum_k I_{jk} \Omega_k \quad \text{oder} \quad \vec{L} = \underline{I} \vec{\Omega} \quad (375)$$

- Drehimpuls  $\vec{L}$  ist lineare Funktion der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\Omega}$
- Wenn körperfeste Basis  $\vec{e}_i$  gleich Hauptträgheitsachsen:

$$L_i = I_i \Omega_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{keine Summation} \quad (376)$$

- Bewegungsgleichungen:

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F} \ddot{\mathbf{a}} \mathbf{u}, \quad \dot{\vec{L}} = \vec{N} \ddot{\mathbf{a}} \mathbf{u} \quad (377)$$

Gelten, wenn sich innere Kräfte herausheben. Ist der Fall, da innere Kräfte Zwangskräfte.

- Mit  $\vec{L} = \sum_{ik} I_{ik} \Omega_k(t) \vec{e}_i(t)$  und  $\vec{N} = \sum_i N_i \vec{e}_i(t)$  folgt

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}}(t) &= \sum_{ik} I_{ik} \dot{\Omega}_k(t) \vec{e}_i(t) + \sum_{ik} I_{ik} \Omega_k(t) \dot{\vec{e}}_i(t) \\ &= \sum_{ik} I_{ik} \dot{\Omega}_k(t) \vec{e}_i(t) + \sum_{ik} I_{ik} \Omega_k(t) (\vec{\Omega} \times \vec{e}_i(t)) = \sum_i N_i \vec{e}_i(t) \end{aligned}$$

Multipliziere mit  $\vec{e}_j(t)$

$$N_j = I_{jk} \dot{\Omega}_k(t) + I_{ik} \Omega_k \Omega_m \epsilon_{mij} \quad (378)$$

- Ist  $I_{jk}$  diagonal, folgen die

Eulerschen Kreiselgleichungen für  $\Omega_i(t)$  :

$$\begin{aligned} N_1 &= I_1 \dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2) \Omega_3 \Omega_2 \\ N_2 &= I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3) \Omega_1 \Omega_3 \\ N_3 &= I_3 \dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1) \Omega_2 \Omega_1 \end{aligned}$$

Spezialfall: Freier symmetrischer Kreisel

$I_1 = I_2$ , 3-Achse heißt Figurenachse



- Eulersche Kreiselgleichungen:

$$\dot{\Omega}_1 + A \Omega_2 = 0, \quad \dot{\Omega}_2 - A \Omega_1 = 0 \quad \dot{\Omega}_3 = 0, \quad \text{mit } A = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \Omega_3 \quad (379)$$

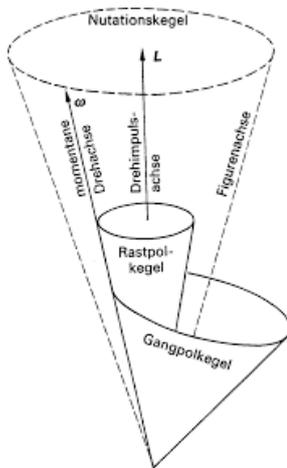
Es folgt durch Ableiten der ersten Gleichung und Einsetzen der zweiten

$$\begin{aligned} \ddot{\Omega}_1 + A \dot{\Omega}_2 &= 0 \\ \dot{\Omega}_2 - A \Omega_1 &= 0 \\ \ddot{\Omega}_1 + A^2 \Omega_1 &= 0 \end{aligned}$$

Ergibt:

$$\Omega_1 = B \cos At, \quad \Omega_2 = B \sin At \quad (380)$$

Heißt Präzession



- Wenn Drehimpuls parallel zur Figurenachse, passiert nichts.  
Ein kleiner Stoss sorgt für action

Praktische Auswirkungen, E-Autoreifen

- statische Unwucht: Schwerpunkt nicht auf Drehachse
- dynamische Unwucht: Drehung nicht um Hauptträgheitsachse

## 9.4 Bewegungsgleichungen für Eulersche Winkel

Aus kinetischer Rotationsenergie

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \Omega_i I_{ij} \Omega_j \quad (381)$$

und Abhängigkeit der  $\Omega_i$  von Eulerwinkeln:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \\ \Omega_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \\ \Omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{aligned}$$

folgt sofort

Lagrangefunktion für Euler-Winkel im körperfesten Hauptachsensystem

$$\begin{aligned} L &= L(\vec{R}, \varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) = T - U \\ &= \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi)^2 + \\ &\quad \frac{1}{2} I_2 (-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi)^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - U(\vec{R}, \varphi, \theta, \psi) \end{aligned}$$

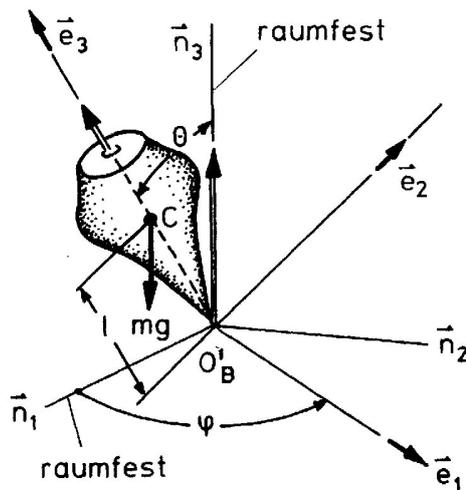
15 23

## 9.5 Der schwere Kreisel

Schwerer Kreisel:

- Symmetrischer Kreisel im Schwerfeld der Erde
- $I_1 = I_2$ ,  $\vec{e}_3$  Figurenachse

- Ursprung  $O'_B$  im körperfesten System: Spitze des Kreisels, fest im raumfesten System



Der schwere symmetrische Kreisel

Bewegungsgleichung

- Für kinetische Energie folgt:

$$T = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 \quad (382)$$

- Gravitationskraft:  $\vec{F}_i = m_i \vec{g}$

Winkel  $(\vec{n}_3, \vec{e}_3) = \theta$

Damit

$$U = Mgl \cos \theta, \quad l = |\vec{R}| \quad (383)$$

- Lagrange-Funktion:

$$L(\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}) = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta \quad (384)$$

- Lagrangefunktion hängt nicht von  $\varphi$  und  $\psi$  ab  $\implies$   $\varphi$  und  $\psi$  sind zyklische Koordinaten.

Erhaltene Größen:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta$$

Geometrische Interpretation:

- $p_\psi$  Komponente von  $\vec{L}$  in  $\vec{e}_3$  Richtung
- $p_\varphi$  Komponente von  $\vec{L}$  in  $\vec{n}_3$  Richtung

Erhaltene Größen ergeben Erste Integrale:

Setze  $p_\psi$  in  $p_\varphi$  ein:

$$p_\varphi = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + p_\psi \cos \theta \quad (385)$$

ergibt

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (386)$$

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} - \dot{\varphi} \cos \theta \quad (387)$$

- Energie  $E = T + U$  ist erhaltene Grösse, da Lagrangefunktion nicht explizit zeitabhängig.

$$E = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + Mgl \cos \theta \quad (388)$$

Ersetze  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\psi}$  aus Gln. (386, 387)

$$E = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + Mgl \cos \theta \quad (389)$$

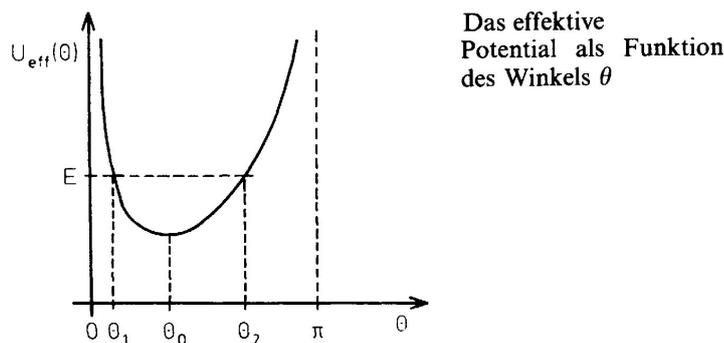
oder

$$E = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta) \quad (390)$$

mit

$$U_{eff}(\theta) = \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + Mgl \cos \theta \quad (391)$$

Gl. (390): Erstes Integral für  $\theta$



Déjà vu: Wieder ein ein-dimensionales Problem, erinnere Zwei-Körper Problem

- Vorgehen
  - Bestimme  $\theta(t)$  aus Gl. (390)
  - Bestimme  $\varphi(t)$  aus Gl. (386)
  - Bestimme  $\psi(t)$  aus Gl. (387)

Exakte Berechnung möglich, aber kompliziert, darum

Qualitative Diskussion

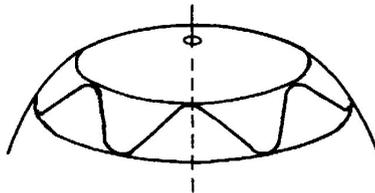
- Neigungswinkel  $\theta$  oszilliert zwischen  $\theta_1$  und  $\theta_2$
- Drehmoment

$$N = \sum_i \vec{b} \times m_i \vec{g} = -Mgl \vec{e}_3 \times \vec{n}_3, \quad \dot{\vec{L}} = N \quad (392)$$

- Gravitation will Kreisel nach unten ziehen
- Aber Drehmoment wirkt in Richtung  $\vec{r} \times \vec{F} \propto \vec{e}_3 \times \vec{n}_3$

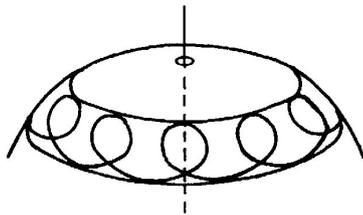
- Ergibt für Bewegung der Figurenaxe drei Möglichkeiten:

a)

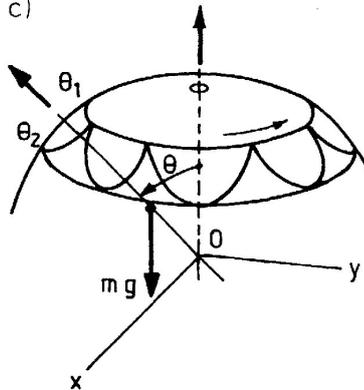


**Die Präzession  
des schweren symmetrischen  
Kreisel mit überlagerter Nutation**

b)



c)



- Drei Beiträge der Kreisel-Bewegung:
  - (i) Präzessionsbewegung<sup>7</sup> von  $\vec{L}$  um Vertikale, beschrieben durch  $\varphi(t)$
  - (ii) Nutationsbewegung<sup>8</sup> der Figurenaxe  $\vec{e}_3$ , beschrieben durch  $\theta(t)$
  - (iii) Rotation des Kreisel, beschrieben durch  $\psi(t)$
- Ob in (a), (b), oder (c) vorliegt, hängt davon ab, ob sich Vorzeichen von

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (393)$$

während Bewegung ändert. Hängt von  $p_\psi$ ,  $p_\varphi$  und  $E$  ab.

(c) ist Grenzfall zwischen (a) und (b)

<sup>7</sup>praecedere: vorrücken

<sup>8</sup>nutare: nicken

- Entspricht  $E$  dem Minimum  $\theta_0$  von  $U_{eff}(\theta)$ , folgt:
  - $\theta(t) = \theta_0 = const$
  - Mit Gln. (386, 387):  $\dot{\varphi}, \dot{\psi}$  konstant
  - Reguläre Präzession wie beim freien symmetrischen Kreisel

Erde hat Präzessionsperiode von 26.000 Jahre. Bad news für Astrologie: Sternzeichen haben sich seit Festlegung vor etwa 2000 Jahren um eins verschoben :-)

Lessons learned:

- Eulersche Winkel sind natürliche Parametrisierung der Drehungen
- Trägheitstensor ist diagonalisierbar, definiert Hauptträgheitsachsen
- Eulerschen Kreiselgleichungen für  $\vec{\Omega}$
- Beim freien symmetrischen Kreisel präzedieren Drehachse  $\vec{\Omega}$  und Figurenachse gleichförmig um  $\vec{L}$
- Schwerer Kreisel:
  - Kreisel-Bewegungsgleichungen (leicht) aus Lagrange-Funktion abgeleitet
  - Lösung durch ein-dimensionale Probleme für  $\theta, \varphi, \psi$ .
  - Präzessions- und Nutationsbewegung.

8. Di. 20

## 10 Für GenießerInnen

### 10.1 Noethersches Theorem

Emmy Noether \* 1882, † 1935

- Erinnere zyklische Koordinaten:

Hängt Lagrange-Funktion nicht von Koordinate  $q_i$  ab, so folgt für Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (394)$$

und der kanonisch konjugierte Impuls

$$p_{q_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (395)$$

ist erhalten.

- Beispiele:
  - Sphärisches Pendel:  $\varphi$  zyklische Koordinate:  $z$ -Komponente des Drehimpulses erhalten

– Schwerer Kreisel:  $\varphi$  &  $\psi$  zyklische Koordinaten: Projektionen von  $\vec{L}$  erhalten

- Betrachte sphärisches Pendel

$$L(\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - mgl(1 - \cos \theta) \quad (396)$$

Unabhängigkeit der Lagrangefunktion von  $\varphi$  bedeutet Invarianz oder Symmetrie der Lagrange-Funktion unter der Transformation: Drehung um  $z$ -Achse.

- Der Zusammenhang zwischen Invarianzen unter Transformationen oder Symmetrien und Erhaltungssätzen gilt tiefer:

Noethersches Theorem:

Sei  $q(t) = (q_1(t), \dots, q_f(t))$  Lösung der Lagrange-Gleichungen.

Ist Lagrange-Funktion invariant unter den Transformationen

$$q_i(t) \mapsto q_i(t, \alpha), \quad i = 1, \dots, f \quad (397)$$

d.h.

$$L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha)) = L(q(t), \dot{q}(t)) \quad (398)$$

so ist die Größe

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tau_i, \quad \text{mit } \tau_i = \left. \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \quad (399)$$

eine Erhaltungsgröße.

Beweis:

- Sei durch

$$q = q(t, \alpha), \quad q(t, 0) = q(t), \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (400)$$

Schar von Bahnkurven gegeben, so dass gilt

$$L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha)) = L(q(t), \dot{q}(t)) \quad (401)$$

- Ableitung nach  $\alpha$ , an der Stelle  $\alpha = 0$  ausgewertet. Da rechte Seite nicht von  $\alpha$  abhängt, folgt:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha)) \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t), \dot{q}(t)) \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (402)$$

- Explizit:

$$0 = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) \Bigg|_{\alpha=0} \quad (403)$$

$$= \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} + \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \quad (404)$$

da nun  $q(t)$  Lösung der Lagrangeschen Bewegungsgleichung, folgt:

$$= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tau_i \right) \Big|_{\alpha=0}, \quad \text{mit } \tau_i = \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad (405)$$

- Beweis Ende

Beispiel:

- Lagrange-Funktion in kartesischen Koordinaten

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_N) \quad (406)$$

- Sei  $L$  invariant unter Translation-Transformation:

$$\vec{r}_i(t) \mapsto \vec{r}_i(t, \alpha) = \vec{r}_i(t) + \alpha \vec{e}, \quad \forall i, \quad \text{mit } \vec{e} \text{ beliebig, aber fester Einheitsvektor} \quad (407)$$

- Ist z.B. der Fall, wenn Potential  $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  nur von Differenzvektoren  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$  abhängt.

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_i - \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_{N-1} - \vec{r}_N) \quad (408)$$

wegen

$$\vec{r}_i(t, \alpha) - \vec{r}_j(t, \alpha) = (\vec{r}_i(t) + \alpha \vec{e}) - (\vec{r}_j(t) + \alpha \vec{e}) = \vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t) \quad (409)$$

- Hier  $(q_1, \dots, q_f) = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$

$$\vec{\tau}_i = \frac{\partial \vec{r}_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \vec{e} \quad (410)$$

und

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \vec{e} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \vec{e} = \vec{P} \vec{e} \quad (411)$$

ist erhaltene Größe.

- Da  $\vec{e}$  beliebig, ist  $\vec{P}$  erhalten.

ist das System translationsinvariant, so ist der Gesamtimpuls erhalten.

Wird Universum kein anders, wenn man es einen Meter nach oben verschiebt  
 $\implies$  Gesamtimpuls des Universum erhalten

- Gilt Invarianz nur für speziellen Vektor  $\vec{e}_0$  so ist nur  $\vec{P}\vec{e}_0$  Komponente von  $\vec{P}$  erhalten.

Übung Drehinvarianz

Übung Erhaltene Größen bei schweren Kreisel

Etwas mehr Arbeit ergibt:

Aus Invarianz unter Zeittranslation folgt Energieerhaltung  
Eine recht globale Aussage :-)

Wird Universum kein anders, wenn man es eine halbe Stunde später ablaufen läßt  
 $\implies$  Gesamtenergie des Universum erhalten

Dimensionsbetrachtung:

- Translationsinvarianz im Raum  $\implies$  Impulserhaltung  $[xp] = m \frac{kg m}{sec}$
- Translationsinvarianz in Zeit  $\implies$  Energieerhaltung  $[tE] = sec \frac{kg m^2}{sec^2}$
- Rotationsinvarianz  $\implies$  Drehimpulserhaltung  $[L] = kg m \frac{m}{s}$
- Einheit jeweils  $\frac{kg m^2}{sec} = [\text{Wirkung}]$

Wirkung

- Wirkung ergibt sich auch bei

$$\int_t dt' L(q(t'), \dot{q}(t')) \quad (412)$$

davon mehr im nächsten Unterkapitel 10.2 Hamiltonsches Prinzip

- Wirkung in Quantenmechanik:

Unschärferelation:

Sei  $\Delta x_i, \Delta p_j$  die möglichen Messgenauigkeiten von Ort und Impuls, so gilt:

$$\Delta x_i \Delta p_j \geq \delta_{ij} \frac{\hbar}{2} \quad (413)$$

Der Zusammenhang "Invarianz/Symmetrie – Erhaltungsgröße" ist fundamental

Speziell Teilchenphysik

- Experimente legen Erhaltungssätze nahe:  
Elektrische Ladung, Baryonen-Ladung, Isospin, ...
- Spieß umdrehen:  
Konstruktionsrichtlinie für Theorien, die diese Erhaltungsgrößen liefern müssen.

Erinnere Kepler-Problem:

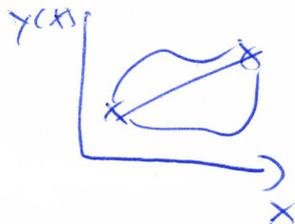
- Erhaltungsgröße Lenz-Runge Vektor
- Zugehörige Symmetrie: Drehgruppe im 4-dimensionalen

## 10.2 Das Hamilton'sche Prinzip

### 10.2.1 Funktionale und Variationsrechnung

- Beispiel:

- Gegeben: Zwei Punkte  $(x_1, y(x_1))$  und  $(x_2, y(x_2))$



- Frage: Was ist die kürzeste Verbindung zwischen den Punkten ?
- Antwort: Grade Linie

- $B_{\vec{x}_1 \vec{x}_2}$ : Menge aller Bahnkurven  $\gamma: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $t \mapsto \vec{x}(t)$  mit  $\vec{x}(t_1) = \vec{x}_1$ ,  $\vec{x}(t_2) = \vec{x}_2$
- Funktional  $I(\gamma)$ :

$$I(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} dt F(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)), \quad I(\gamma) : B_{\vec{x}_1 \vec{x}_2} \mapsto \mathbb{R} \quad (414)$$

- Funktionen  $f(x)$  bilden Zahlen auf Zahlen ab
- Funktionale  $I(\gamma)$  bilden Funktionen auf Zahlen ab

Beispiel:

$$I(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{\vec{x}}^2(t)} \quad \text{Bogenlänge} \quad (415)$$

Aufgabe der Variationsrechnung:

- Gegeben Anfangs- und Endwerte  $\vec{x}(t_1) = \vec{x}_1$ ,  $\vec{x}(t_2) = \vec{x}_2$
- Gegeben  $F(.,.)$  aus Problemstellung

Beispiel Bogenlänge:

$$F(\dot{\vec{x}}(t)) = \sqrt{\dot{\vec{x}}^2(t)} \quad (416)$$

- Ermittle Bahnkurve  $\vec{x}(t)$ , die Funktional  $I(\gamma)$  extremal macht.
- Analogie Differentialrechnung: Gegeben Funktion  $f(x)$ , suche  $x_0$ , das  $f(x)$  extremal macht:  $f'(x_0) = 0$
- Hier nicht Punkt  $x_0$ , sondern Bahnkurve  $\vec{x}(t)$  gesucht
- Ab jetzt keine Vektorpfeile mehr

- Stetigkeit

- Bei Funktionen  $f(x)$ :  
 $f(x)$  stetig an  $x_0$ , wenn für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass gilt

$$\text{Aus } |x - x_0| < \delta \quad \text{folgt} \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad (417)$$

– Für Funktionale

Sei  $\vec{\eta}(t)$  Bahnkurve mit  $\vec{\eta}(t_1) = \vec{\eta}(t_2) = 0$

$I(\gamma)$  stetig im "Punkt" Bahnkurve  $x(t)$ , wenn für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass gilt

$$\text{Aus } \|\alpha\eta(t)\| < \delta \quad \text{folgt} \quad |I(x(t) + \alpha\eta(t)) - I(x(t))| < \epsilon \quad \forall \eta(t) \quad (418)$$

mit Norm z.B.

$$\|\alpha\eta(t)\| := \max_{t_1 < t < t_2} |\alpha\eta(t)| \quad \text{oder} \quad \|\alpha\eta(t)\| = \int_{t_1}^{t_2} dt |\alpha\eta(t)| \quad (419)$$

## ZEICHNUNG

• Differenzierbar:

– Bei Funktionen  $y(x)$ : Differenzierbar an  $x_0$ , wenn Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0) \quad (420)$$

existiert

–  $I(\gamma)$  differenzierbar im "Punkt" Bahnkurve  $x(t)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{I(x(t) + \alpha\eta(t)) - I(x(t))}{\|\alpha\eta(t)\|} = \frac{dI}{\|d\alpha\eta(t)\|} = I'(x(t)) \quad \forall \eta(t) \quad (421)$$

$$\frac{I(x(t) + \alpha\eta(t)) - I(x(t))}{\|\alpha\eta(t)\|} \quad \& \quad \frac{dI}{\|d\alpha\eta(t)\|} \quad \text{sind} \quad \forall \eta(t) \quad \text{schwierige Terme}$$

Aber Problem klar gestellt.

• Definiere

$$x(t, \alpha) := x(t) + \alpha\eta(t), \quad \text{mit } \eta(t_1) = \eta(t_2) = 0 \quad (422)$$

und betrachte

$$I(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} dt F(x(t, \alpha), \dot{x}(t, \alpha)) \quad (423)$$

Für unten:

$$\frac{dx(t, \alpha)}{d\alpha} = \eta(t), \quad \frac{dx(t_1, \alpha)}{d\alpha} = \frac{dx(t_2, \alpha)}{d\alpha} = 0 \quad (424)$$

• Bilde Variation  $\delta I$  von  $I$ , d.h. wie ändert sich  $I$ , wenn man mit  $\alpha$  ein bisschen an  $x(t)$  wackelt<sup>9</sup>

$$\delta I := \frac{dI}{d\alpha} d\alpha = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{d\alpha} \right) d\alpha \quad (425)$$

Mit

$$\frac{d\dot{x}}{d\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{d\alpha} \quad (426)$$

folgt

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \frac{dx}{d\alpha} \right) d\alpha \quad (427)$$

<sup>9</sup>Physiker-Beweis, kann man mathematisch hart machen

- Nun 2. Term partiell integriert

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \frac{dx}{d\alpha} = - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \frac{dx}{d\alpha} + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{dx}{d\alpha} \right|_{t_1}^{t_2} \quad (428)$$

2. Term verschwindet, da  $\frac{dx}{d\alpha} = \eta(t)$  bei  $t_1$  und  $t_2$  verschwindet.

- Es folgt

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \frac{dx}{d\alpha} d\alpha \quad (429)$$

- Der Ausdruck

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \right) F =: \frac{\delta F}{\delta x} \quad (430)$$

heißt Variationsableitung von  $F$  nach  $x$

- Infinitesimale Variation der Kurve  $x$ :

$$\delta x := \frac{dx}{d\alpha} d\alpha = \eta d\alpha \quad (431)$$

Ergibt

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \delta x \quad (432)$$

- Nun das Argument:

- $I(\alpha)$  soll extremal werden.
- Das heißt,  $I(\alpha)$  soll sich bei infinitesimalen Variationen  $\delta x$  der Kurve  $x$  nicht ändern.
- Soll dies  $\forall$  Variationen  $\delta x$  gelten, so muss Klammer in Gl. (432) verschwinden:

Es folgt: Eulersche Differentialgleichung der Variationsrechnung:

$I(\gamma)$  wird extremal, wenn

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (433)$$

- Beachte: Problem, dass es unendlich viele mögliche  $\eta(t)$  gibt, ist gelöst.

### 10.2.2 Hamilton'sches Prinzip

Wählt man für  $F(x, \dot{x})$  die Lagrange-Funktion  $L(q, \dot{q})$ , so erhält man die Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (434)$$

Daher nennt man Lagrange-Gleichung auch Euler-Lagrange Gleichung

- Wirkungsfunktional

$$I(q) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t)) \quad (435)$$

Wirkung, weil  $L(\cdot)$  Dimension einer Energie, Zeitintegral darüber hat Dimension einer Wirkung

- Teilchen bewegt sich so, dass die Wirkung extremal wird. Analyse der 2. Ableitung zeigt, dass Wirkung minimal wird.

Hamilton'sches Prinzip: Prinzip der kleinsten Wirkung

- System bewegt sich so, dass  $I(q)$  minimal wird
- Dies entspricht den Lagrange-Gleichungen
- Touch von Teleologie<sup>10</sup>, da  $I(q)$  globale Größe. "als ob"-Beschreibung
- Man zeigt leicht: Hamilton'sches Prinzip ist koordinatenunabhängig
- Analog: Fermatsches Prinzip "Licht nimmt seinen Weg immer so, dass es ihn in der kürzesten Zeit zurücklegt"

$$I(x) = \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} dx n(x), \quad n(\cdot) \text{ Brechungsindex, } [I] = t \quad (436)$$

### 10.2.3 Ein Beispiel

Der Kürzeste Weg  
 $y(x)$  Formulierung

$$\text{Mit } y' = \frac{dy}{dx} : \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (437)$$

- Infinitesimales Stückchen

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad \implies \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + y'(x)^2} \quad (438)$$

- Funktional

$$I(y) = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'(x)^2} \quad (439)$$

---

<sup>10</sup>griech: télos: Ziel, logos: Lehre

- Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{d}{dx} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = 0 \quad (440)$$

- Lösung:

$$y'(x) = \text{const}, \quad y = ax + b \quad (441)$$

17 23

Zusammenfassung

- Aufgabe der Variationsrechnung: Extremalisieren Funktional

$$I(x) = \int_{t_1}^{t_2} dt F(x(t), \dot{x}(t), t) \quad (442)$$

- Variationsrechnung führt auf

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (443)$$

- Ergibt, dass Lagrange-Gleichungen das Wirkungsfunktional

$$I(q) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (444)$$

extremalisieren.

- Ableitung von Theorien aus Extremalprinzipien hat sich als sehr fruchtbar erwiesen.
- Darstellung sehr kompakt: Bewegungsgleichung aus  $\delta I = 0$

Übung zu Extremalprinzipien: Brachistochronen-Problem

### 10.3 Mechanische Ähnlichkeit revisited

- Betrachte statt  $L(q, \dot{q})$  skalierte Version:

$$L'(q, \dot{q}) = \gamma L(q, \dot{q}), \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad (445)$$

- Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L'}{\partial q} = \gamma \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right) = 0 \quad (446)$$

Bewegungsgleichungen sind invariant unter Skalierung der Lagrange-Funktion

- Erinnerung: Homogene Funktionen
- Annahme:  $U(q)$  sein homogen vom Grade  $k$ :

$$U(\alpha q) = \alpha^k U(q) \quad (447)$$

- Betrachte Transformationen  $q'_i = \alpha q_i$   $t' = \beta t$

Dann folgt

$$\dot{q}'_i = \frac{dq'_i}{dt'} = \frac{\alpha}{\beta} \dot{q}_i$$

- Somit

$$L\left(\alpha q, \frac{\alpha}{\beta} \dot{q}\right) = T\left(\frac{\alpha}{\beta} \dot{q}_i\right) - U(\alpha q_i) = \frac{\alpha^2}{\beta^2} T(\dot{q}_i) - \alpha^k U(q_i) \quad (448)$$

- Wähle

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k, \quad \text{oder } \beta = \alpha^{1-k/2} \quad (449)$$

dann resultiert eine Skalierung der Lagrange-Funktion

$$L\left(\alpha q, \frac{\alpha}{\beta} \dot{q}\right) = \frac{\alpha^2}{\beta^2} L(q, \dot{q}) = \gamma L(q, \dot{q}) = L'(q, \dot{q}) \quad (450)$$

und Bewegungsgleichungen bleiben mit Gl. (446) unverändert.

- Beispiel: Gravitation

$$U(r) \propto \frac{1}{r}, \quad k = -1, \quad \beta = \alpha^{3/2}, \quad \frac{t'}{t} = \left(\frac{q'_i}{q_i}\right)^{3/2} \quad (451)$$

Wieder 3. Keplersches Gesetz

## 10.4 Kanonisch konjugierter Impuls im magnetischen Falle

- Erinnere kanonisch konjugierten Impuls :

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (452)$$

- Betrachte: Ladung in elektromagnetischem Feld

Lorentz-Kraft:

$$\vec{F}_L = e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \dot{\vec{r}} \times \vec{B} \right) \quad (453)$$

Kommendes Semester: Es existieren Potentiale  $\phi(\vec{r}, t)$  und  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ , so dass:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \quad (454)$$

- Mit Potential

$$U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = e \phi(\vec{r}, t) - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}} \quad (455)$$

folgt Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - e \phi + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (456)$$

”Teil des Potentials wandert in den kinetischen Teil”

Genau umgekehrt zu den effektiven Potentialen bei 2-Körper-Problem und Kreisel

- Somit

Kanonisch konjugierter Impuls im magnetischen Falle:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + \frac{e}{c}\vec{A} \quad (457)$$

## 10.5 Uneindeutigkeit der Lagrange-Funktion

- Betrachte Funktion  $M(q)$  und sei

$$L'(q, \dot{q}) = L(q, \dot{q}) + \frac{d}{dt}M(q) = L(q, \dot{q}) + \sum_i \frac{\partial M}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (458)$$

Wirkungsfunktional

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt L' = \int_{t_1}^{t_2} dt L + M(q(t_2)) - M(q(t_1)) \quad (459)$$

Bei der Variation werden die Randwerte festgehalten.

Daher fällt Beitrag von  $M(q)$  raus

- Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L'}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \right) \frac{d}{dt} M(q) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \sum_i \frac{\partial M}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) - \frac{\partial M}{\partial q_k} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \end{aligned}$$

sind invariant.

- Beispiel: Harmonischer Oszillator

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (460)$$

Betrachte  $M(q) = \frac{q^2}{2}$

$$L' = L + \frac{d}{dt} \frac{q^2}{2} = L + q\dot{q} \quad (461)$$

Gibt die selben Bewegungsgleichungen.

- Ergo: Lagrange-Funktion ist keine physikalische Observable.
- Invarianz der Bewegungsgleichungen, d.h. der beobachtbaren Physik, bei Änderung der Lagrange-Funktion, heißt Eichinvarianz  
Solche "Änderungen" heißen Eichtransformationen.

Wird in Elektrodynamik und Quantenmechanik wieder auftauchen

Lessons learned:

- Noether Theorem: Invarianzen/Symmetrien  $\iff$  Erhaltungsgrößen
- Hamiltonsches Prinzip: Prinzip der kleinsten Wirkung, leicht teleologisch, aber sehr fruchtbar
- Mechanische Ähnlichkeit gibt ohne jede Arbeit 3. Kepler Gesetz
- Lagrange-Funktion keine physikalische Observable, sondern intellektuelle Leistung
- Generell: Lagrange-Formalismus: Von Behandlung von Zwangskräften zur eigenständigen Theorie

9. Di. 20

## Part III

# Hamilton'sche Mechanik

## 11 Grundlagen

Sir William Rowan Hamilton \* 1805 † 1865

### 11.1 Von Lagrange zu Hamilton

#### 11.1.1 Legendre-Transformation

- Allgemeines Verfahren zum Wechsel von unabhängigen Variablen
- Sei  $f(x)$  hinreichend glatte Funktion mit  $d^2f/dx^2 \neq 0$
- Definiere Legendre-Transformation  $\mathcal{L}$  der Funktion  $f(x)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(x)) &:= \frac{\partial f(x)}{\partial x} x - f(x) \\ \text{neue Variable } u &:= \frac{\partial f(x)}{\partial x}, \quad x = h(u) \\ \mathcal{L}(f(x)) &= u h(u) - f(h(u)) =: (\mathcal{L}f)(u)\end{aligned}\tag{462}$$

oder

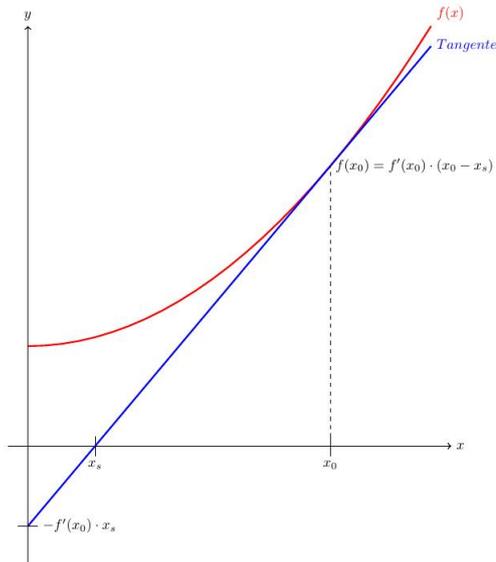
$$(\mathcal{L}f)(u) =: g(u) = ux - f(x), \quad x \text{ festgelegt aus } u = \frac{\partial f(x)}{\partial x}\tag{463}$$

- Wegen  $d^2f/dx^2 \neq 0$  eindeutig

Anschauliche Interpretation:

- Eine Funktion kann durch  $f(x)$  beschrieben werden,  $x$  unabhängige Variable.

- Sie kann aber auch durch die Tangentenschar an  $f(x)$  beschrieben werden, da die Einhüllende Tangentenschar die Funktion  $f(x)$  ist.
- Um die Tangentenschar festzulegen, braucht es die Steigung  $f'(x)$  und zum Beispiel den jeweiligen  $y$ -Achsenabschnitt  $g(f'(x))$ .
- Damit ist die Steigung  $u = f'(x)$  die neue unabhängige Variable.



- Es ergibt sich

$$f(x_0) = f'(x_0)(x_0 - x_s) \quad (464)$$

$$f'(x_0)x_s = f'(x_0)x_0 - f(x_0) \quad (465)$$

$f'(x_0)x_s$  ist modulu Vorzeichen der  $y$ -Achsenabschnitt der Tangente

- Gehe von festem  $x_0$  zu unabhängiger Variable  $x$ , setze  $u = f'(x)$ , so folgt

$$g(u) = ux - f(x), \quad (466)$$

- Damit  $u$  neue unabhängige Variable
- Legendre-Transformation = "Berührungstransformation"

Mathematische Interpretation:

- Legendre-Transformation: Unabhängige Variable  $x$  wird durch neue unabhängige Variable  $u = \frac{\partial f}{\partial x}$  ersetzt.
- Differentiell, das macht es klarer:
- Für Differential von  $f(x)$  gilt:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx = u dx, \quad (467)$$

- Für  $g(u)$  gilt:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial u} du = x du. \quad (468)$$

- Bilde Differential von  $ux$ :

$$d(ux) = xdu + udx \quad (469)$$

Vergleich mit  $dg$  &  $df$

$$d(ux) = dg + df \quad (470)$$

- Also

$$dg = d(ux - f), \quad (471)$$

und nach Integration

$$g(u) = ux - f(x) \quad (472)$$

- Mehrdimensional für  $f(x, y)$

$$g(u, v) = ux + vy - f(x, y) \quad (473)$$

- Einzelne Variable

$$g(x, v) = vy - f(x, y) \quad (474)$$

- Mit

$$(\mathcal{L}f)(u) =: g(u) = ux - f(x) \quad (475)$$

folgt:

Legendre-Transformation ist involutorisch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\mathcal{L}f(x) = \mathcal{L}g(u) &= u \frac{\partial g}{\partial u} - g(u) \\ &= xu - ux + f(x) = f(x) \end{aligned}$$

Das heißt: Zweimaliges Anwenden gibt den Ausgangspunkt zurück.

### 11.1.2 Mit Legendre-Transformation von Lagrange zu Hamilton

- Mit Lagrange-Funktion  $L = T - U$  gelten Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (476)$$

- Verallgemeinerte, kanonisch-konjugierte Impulse:

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q, \dot{q}) \quad p_i \text{ entspricht } u \text{ von Gl. (463), } \dot{q}_i \text{ entspricht } x \quad (477)$$

Löse analog zu Gl. (463) die Gl. (477) nach  $\dot{q}$  auf:

$$\dot{q} = \dot{q}(q, p) \quad (478)$$

- Definiere die Hamilton-Funktion als Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion

$$H(q, p) = \mathcal{L}L(q, \dot{q}) \quad (479)$$

konkret, mit  $q = (q_1, \dots, q_f)$ ,  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ ,  $\dot{p} = (\dot{p}_1, \dots, \dot{p}_f)$ ,  $p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ :

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i(q, p) - L(q, \dot{q}(q, p)) \quad (480)$$

Kurzform

$$H(q, p) = p \dot{q}(q, p) - L(q, \dot{q}(q, p)) \quad (481)$$

Beachte Gl. (481) entspricht genau Gl. (474)

- In kartesischen Koordinaten, wenn Kräfte nicht von Geschwindigkeiten abhängen mit:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - U(r) \quad (482)$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, \quad \dot{r} = \frac{p}{m} \quad (483)$$

folgt:

$$\begin{aligned} H(r, p) &= p \dot{r}(r, p) - L(r, \dot{r}(r, p)) \\ &= \frac{p^2}{m} - \left( \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} - U(r) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + U(r) = T + U \end{aligned}$$

- Anwendungen in der Statistischen Physik:

Analog zu Paarung  $(\dot{q}, p)$  gibt es in der Statistischen Physik Paarungen  $(p, V)$ ,  $(S, T)$  und  $(\mu, N)$ , alle auch Einheit [Energie]

Verschiedene Energien in Abhängigkeit verschiedener Variablen

- Innere Energie:  $E(S, V, N)$
- Enthalpie:  $H(S, p, N)$
- Freie Enthalpie:  $G(T, p, N)$
- ...

”Umschalten” mit Legendre-Transformation

9. Do. 20  
18 23

## 11.2 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen sind äquivalent zu den

Hamiltonschen Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}$$

- Beweis, eine Richtung, alle Vektorpfeile unterdrückt:

Aus Definition von  $H$ :

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i(q, p) - L(q, \dot{q}(q, p)) \quad (484)$$

folgt

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j(q, p) + \sum_i \left( p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} \right) = \dot{q}_j, \quad \text{da } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} =: p_i \quad (485)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad (486)$$

Aus Lagrange Gleichungen

$$- \frac{\partial L}{\partial q_j} = - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = - \dot{p}_j \quad (487)$$

- Beweis, andere Richtung:

Analog folgt aus nochmaliger Legendre-Transformation (remember: involutorisch) :

$$L(q, \dot{q}) = \sum_i p_i(q, \dot{q}) \dot{q}_i - H(q, p(q, \dot{q})) \quad (488)$$

Mit

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (489)$$

folgt

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_i \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_j} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (490)$$

und

$$- \frac{\partial H}{\partial q_j} = \dot{p}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad (491)$$

Meditation über Hamilton

- System mit  $f$  Freiheitsgraden wird durch  $f$  Koordianten  $q_1, \dots, q_f$  und  $f$  Impulse  $p_1, \dots, p_f$  beschrieben.
- Anfangsbedingungen:  
Statt  $\vec{q}(t_0)$  und  $\dot{\vec{q}}(t_0)$  bei Lagrange nun  $\vec{q}(t_0)$  und  $\vec{p}(t_0)$  bei Hamilton
- Beachte: In Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

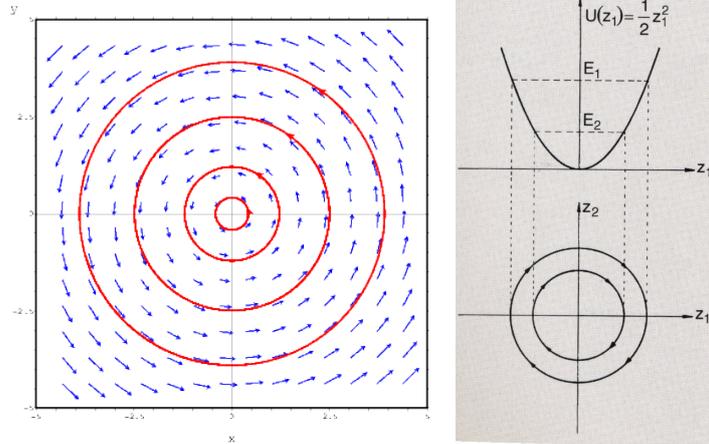
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (492)$$

sind  $q_i$  und  $p_i$  sind symmetrisch eigenständig

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad \text{bildet den } \underline{\text{Phasenraum}} \quad (493)$$

- Zustand im Phasenraum eindeutig und

Hamiltonsche Gleichungen induzieren Vektorfeld:  $\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix}$



Für's Gemüt formaler:

- Lagrange:
  - Konfigurationsraum der  $q \in \mathbb{R}^{3N}$
  - Bewegungsgleichungen: Differentialgleichungen 2. Ordnung
  - Lösung:  $q(t)$
  - Rolle von  $\dot{q}(t)$ 
    - \*  $\dot{q}(0)$  geht als Anfangsbedingung ein, hat dann aber seine Schuldigkeit getan, denn ...
    - \*  $\dot{q}(t), t > 0$  ist abgeleitete<sup>11</sup> Größe
- Hamilton
  - Phasenraum  $(q, p) \in \mathbb{R}^{6N}$
  - Bewegungsgleichungen: Differentialgleichungen 1. Ordnung
  - Lösung:  $\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$
  - Rollen von  $q(t)$  und  $p(t)$  komplett gleichberechtigt.

### 11.2.1 Beispiel

Harmonischer Oszillator, eine Dimension:

- Potential:

$$U(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (494)$$

Lagrange-Funktion:

$$L(q, \dot{q}) = T - U = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (495)$$

---

<sup>11</sup>Wortspiel-Verdacht

- Verallgemeinerter Impuls:

$$p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \quad \dot{q} = p/m \quad (496)$$

- Hamilton = Legendre(Lagrange):

$$\begin{aligned} H(q, p) &= \mathcal{L}(L(q, \dot{q})) = \dot{q}(p)p - L(q, \dot{q}(p)) = \dot{q}(p)p - \left( \frac{1}{2}m\dot{q}(p)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \right) \\ &= \frac{p^2}{m} - \left( \frac{1}{2}m\frac{p^2}{m^2} - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \right) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = T + U \end{aligned}$$

- Bewegungsgleichungen:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q = -\nabla U \quad (497)$$

Mit

$$\dot{p} = m\ddot{q} \quad (498)$$

erwartungsgemäß:

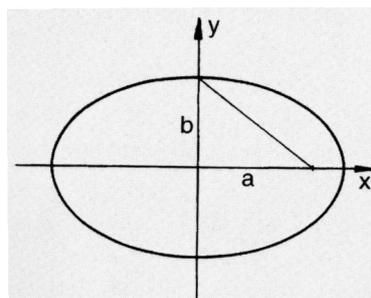
$$\ddot{q} = -\omega^2 q \quad (499)$$

- Hamilton-Funktion ist hier identisch mit Energie, die erhalten ist.

$$H = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (500)$$

definiert Ellipsen mit Halbachsen:

$$a = \sqrt{\frac{2}{m\omega^2}} \sqrt{E}, \quad b = \sqrt{2m} \sqrt{E} \quad (501)$$



$$x = q, \quad y = p$$

### 11.2.2 Hamiltonfunktion, Energie und Erhaltungsgrößen

- Mit

$$H(q, p, t) = \sum_i \dot{q}_i(q, p, t)p_i - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) \quad (502)$$

folgt

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} p_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (503)$$

- Mit Gl. (278) aus Kap. 7.2.1 Energieerhaltung bei Lagrange Formalismus

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad \text{und} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (504)$$

folgt aus Definition von  $H$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (505)$$

Ergo:

$H$  nicht explizit zeitabhängig, d.h. zeittranslationsinvariant  $\implies H = const$

- Hängt  $T$  nur quadratisch von  $\dot{q}_i$  ab, dann ist Hamiltonfunktion

$$H(q, p) = T(q, p) + U(q) \quad (506)$$

gleich der Energie

- Das ist bei holonom-skleronomen Systemen mit konservativen Kräften der Fall.

Folge: Man braucht Hamilton-Funktion nicht über Legendre-Transformation der Lagrange-Funktion bestimmen, sondern einfach aus  $H = T + U$

- Zyklische Koordinate: Hängt  $H(q, p)$  nicht von  $q_i$  ab, so gilt:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad \text{folgt } p_i = const, \text{ Erhaltungsgröße} \quad (507)$$

### 11.3 Theorem von Liouville

- Betrachte Vektorfeld  $\vec{x}$ , das durch Hamiltonsche Gleichungen induziert wird.

$$x = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} \quad (508)$$

und seine Divergenz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{x} = \left( \frac{\partial}{\partial q} \right) \cdot \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial}{\partial q} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0 \quad (509)$$

Satz von Schwartz

- Folgt:

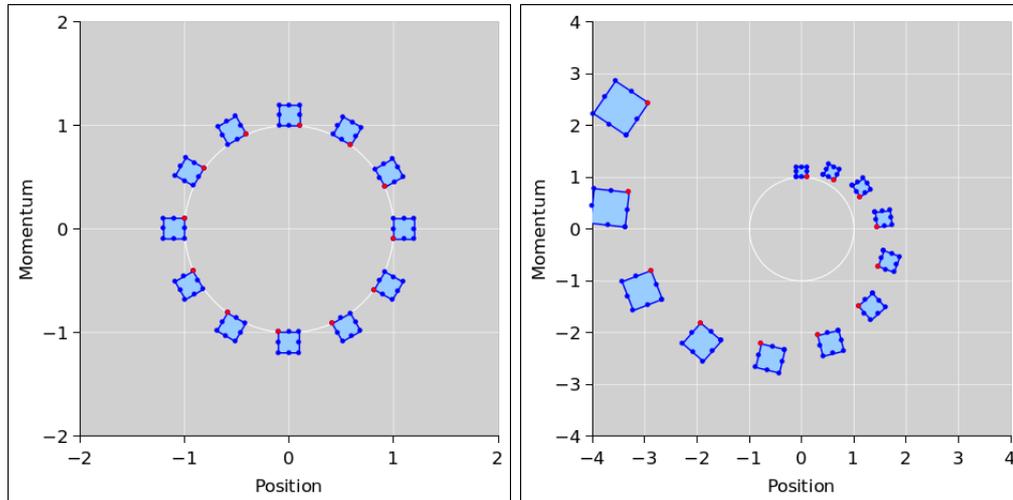
In Hamiltonschen Systemen ist das Phasenraumvolumen ist erhalten.

- Diese Einsicht ist nur im Hamilton-Formalismus möglich.

- Zwei Beispiele

Harmonischer Oszillator  
Hamiltonsches System

gedämpfter Harmonischer Oszillator  
kein Hamiltonsches System



## 11.4 Poissonklammern

- Betrachte Zeitentwicklung einer Größe  $A(q(t), p(t), t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A(q(t), p(t), t) &= \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned}$$

- Definiere

Poissonklammer zweier Funktionen  $f(q, p)$  und  $g(q, p)$  auf dem Phasenraum

$$\{f, g\} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (510)$$

- Ist  $A$  nicht explizit zeitabhängig, so Zeitentwicklung durch:

$$\frac{d}{dt}A(q(t), p(t)) = \{A, H\} \quad (511)$$

$A(q(t), p(t))$  ist genau dann erhaltene Größe, wenn  $\{A, H\} = 0$

- Beispiel: Radialsymmetrisches Potential

In Kugelkoordinaten, mit kanonisch konjugierten Impulsen  $p_r, p_\theta, p_\varphi$

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r) \quad (512)$$

folgt für Drehimpulskomponenten  $L_i$

$$\{L_i, H\} = 0 \quad (513)$$

Drehimpuls erhalten.

Beweis als Übung

- Bewegungsgleichungen:

$$\{q_j, H\} = \sum_i \left( \frac{\partial q_j}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial q_j}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j \quad (514)$$

$$\{p_j, H\} = \sum_i \left( \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = \dot{p}_j \quad (515)$$

- Aber auch

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (516)$$

Daraus wird in Quantenmechanik die Unschärfe-Relation und aus  $\{.,.\}$  der Kommutator  $[.,.]$  ...

Lessons learned:

- Legendre Transformation: Wechsel der unabhängigen Variablen
  - Hamilton = Legendre (Lagrange)
  - Hamiltonsche Bewegungsgleichungen induzieren Vektorfeld im Phasenraum
  - Liouville: In Hamiltonschen Systemen ist das Phasenraumvolumen erhalten.
  - Poisson-Klammer für Zeitentwicklung
- Bitte merken für Quantenmechanik

## 12 Für GenießerInnen

### 12.1 Hamiltonsche Gleichungen aus Variationsprinzip

Hamiltonsches Prinzip revisited

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = 0, \quad \delta \rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} d\alpha \quad (517)$$

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial \alpha} d\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_t dt \left( \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p) \right) d\alpha = 0 \quad (518)$$

$$\int_t dt \sum_i \left( \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \dot{q}_i + p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \right) d\alpha = 0 \quad (519)$$

Mit

$$\int_t dt p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} = \int_t dt p_i \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \stackrel{\text{P.I.}}{=} \underbrace{p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_t dt \dot{p} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \quad (520)$$

und

$$\delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} d\alpha, \quad \delta p_i = \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} d\alpha \quad (521)$$

folgt:

$$\int_t dt \sum_i \left\{ \delta p_i \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \delta q_i \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right\} = 0 \quad (522)$$

Da Variationen  $\delta q$  und  $\delta p$  unabhängig, müssen beide Klammern verschwinden, et voilà:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (523)$$

Fundamentaler Unterschied zu Lagrange:

- Lagrange: Zwar  $q(0)$  und  $\dot{q}(0)$  unabhängige Größen, aber danach  $\dot{q}(t)$  von  $q(t)$  abgeleitete<sup>12</sup> Größe.
- Darum nicht unabhängig variierbar.
- Hamilton:  $q(t)$  und  $p(t)$  gleichberechtigt unabhängig
- Darum einzeln variierbar.

Das ist Unterschied zwischen Dynamik 2. Ordnung im Konfigurationsraum bei Lagrange und Dynamik 1. Ordnung im Phasenraum bei Hamilton

Lessons learned:

- Variationsrechnung macht fundamentalen Unterschied Lagrange zu Hamilton klar

---

<sup>12</sup>Wortspielverdacht !

## Part IV

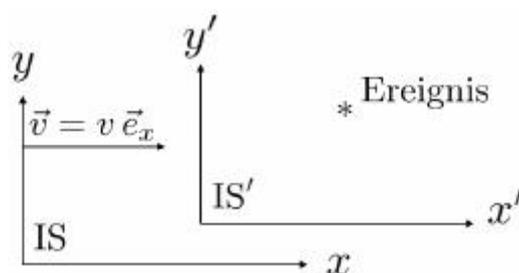
# Spezielle Relativitätstheorie

## 13 Raum und Zeit

### 13.1 Relativitätsprinzip

Betrachte zwei Inertialsysteme IS und IS'

- Parallele Achsen
- Relativgeschwindigkeit:  $\vec{v} = v\vec{e}_x$



Galilei-Transformation

Bei Newton gilt die Galilei-Transformation

$$\begin{aligned}x' &= x - vt \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}\tag{524}$$

Galileisches Relativitätsprinzip:

- Alle Inertialsysteme sind gleichwertig
- Die Newtonschen Gesetze gelten in allen Inertialsystemen

Beispiele:

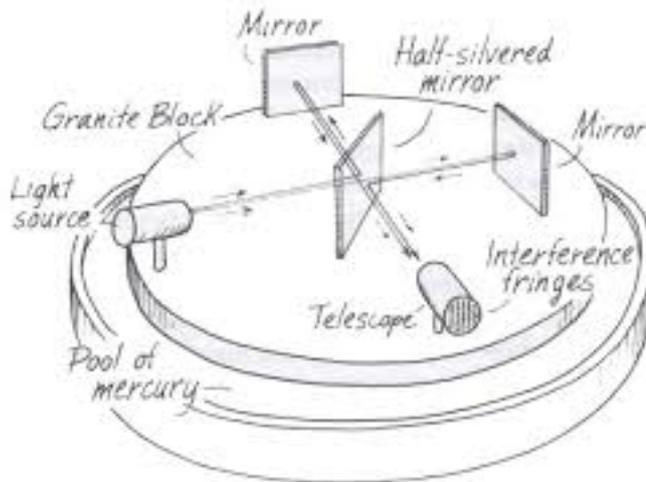
- Schallwellen
  - Materie ist der Träger von Schallwellen
  - Bei ruhender Materie breitet sich der Schall mit Geschwindigkeit  $c_s$  aus
  - Bewegt sich die Materie mit Geschwindigkeit  $\vec{v} = v\vec{e}_x$ , so breitet sich Schall in unbewegtem System in Richtung von  $\vec{x}$  mit  $c' = v + c_s$  aus
- Elektromagnetische Wellen, Lichtgeschwindigkeit  $c$ 
  - Argumentation mit Galilei-Transformation die selbe

$$c' = v + c\tag{525}$$

- Aber was ist der Träger ?
- Materie kann es nicht sein, da sich elektromagnetische Wellen auch im Vakuum ausbreiten
- Äther-Hypothese

Michelson-Morley Experiment (1887)

- Messung der Geschwindigkeit des Äthers relativ zur Erde, "Ätherwind"
- Interferenz-Experiment mit und senkrecht zu der Bewegung der Erde



Cable Car durfte nicht fahren :-)

- Erde relativ zur Sonne:  $30 \text{ km/sec}$
- Sonnensystem relativ zum galaktischen Zentrum  $220 \text{ km/sec}$
- Experimentelles Ergebnis: Unterschied  $< 8 \text{ km/sec}$
- Heute: Beliebig exaktes Null-Resultat,  $\Delta c/c \approx 10^{-17}$
- Folglich kann Gl. (525) und damit Gl. (524) nicht allgemein gelten

Einsteinsches Relativitätsprinzip

- Alle Inertialsysteme sind gleichwertig
- Licht breitet sich in jedem Inertialsystem mit der Geschwindigkeit  $c$  aus

Anders formuliert

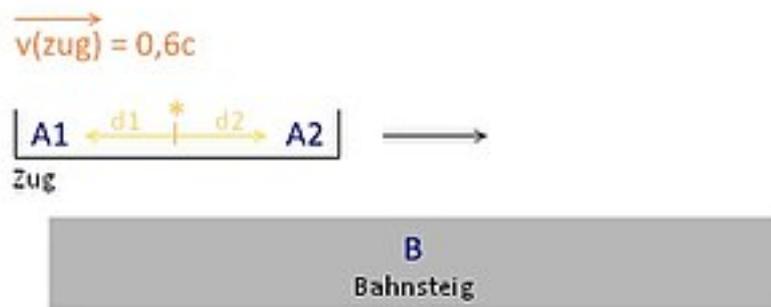
- Die Lichtgeschwindigkeit hängt nicht von der Bewegung des Senders ab

Meditation über Vorstellungskraft als Wahrheitsbedingung

### **Relativität der Gleichzeitigkeit**

Betrachte Gedankenexperiment

- Zug fährt durch Bahnhof



- In der Mitte des Zuges wird ein Lichtblitz ausgelöst
- An den Enden des Zuges sind Uhren, die bei Ankunft des Lichtblitzes zu laufen beginnen
- Zugmitfahrer stellt durch Uhrenvergleich fest, dass sie synchron laufen, gleichzeitig vom Lichtblitz erreicht wurden
- Blick vom Bahnsteig, an dem viele Uhren angebracht sind
- Blitz hat zur Zugspitze längeren Weg als zum Zugende
- Uhr, die beim Erreichen des Blitzes der Zugspitze losläuft, startet später als die für's Zugende zuständige
- Gleichzeitigkeit hängt vom Bezugssystem ab, ist also relativ

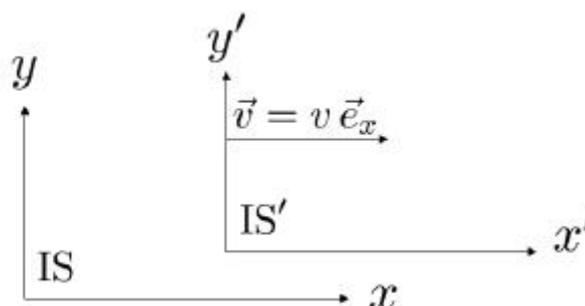
Beachte: Effekt verschwindet, wenn Lichtgeschwindigkeit unendlich groß wäre, also bei instantaner Signalausbreitung

## 13.2 Lorentz-Transformation

Transformation zwischen zwei Inertialsystemen IS und IS' in Anbetracht der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen

- Homogenität von Raum und Zeit  
Alle Punkte in Raum und Zeit sind äquivalent  
Koordinatenursprünge können somit beliebig gewählt werden
- Isotropie des Raumes  
Alle Raumrichtungen sind äquivalent

Betrachte Bewegung entlang der  $x$ -Achse



Ruhendes Inertialsystem IS und relativ dazu gleichförmig bewegtes IS'

Bei  $t = 0$  fallen IS und IS' zusammen

$$\begin{aligned}x_0 &= x'_0 = 0 \\t_0 &= t'_0 = 0\end{aligned}$$

- Wegen Homogenität von Raum und Zeit muss die Transformation linear sein  
Sonst würden in IS gleichförmig bewegte Körper in IS' beschleunigt werden

Ansatz:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(v) & a_{12}(v) \\ a_{21}(v) & a_{22}(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (526)$$

Wegen Anfangsbedingungen:  $b_1 = b_2 = 0$ ,  $v$  Abhängigkeit von  $a_{ij}$  unterdrückt

$$x' = a_{11}x + a_{12}t \quad (527)$$

$$t' = a_{21}x + a_{22}t \quad (528)$$

- Betrachte Bewegung des Ursprungs von IS' in IS, d.h.  $x' = 0$   
Aus Gl. (527) folgt

$$0 = a_{11}x + a_{12}t \quad \text{oder} \quad a_{12} = -a_{11} \frac{x}{t} = -a_{11}v \quad (529)$$

Eingesetzt in Gl. (527) folgt

$$x' = a_{11}(v)(x - vt) \quad (530)$$

- Analog folgt aus Bewegung des Ursprungs von IS in IS',  $x = 0$

$$x = a_{11}(-v)(x' - (-v)t') = a_{11}(-v)(x' + vt') \quad (531)$$

- Aus Isotropie des Raumes folgt:

$$a_{11}(v) = a_{11}(-v) \quad \text{oder} \quad a_{11}(v) = a_{11}(|v|) \quad (532)$$

- Betrachte Lichtquelle,
  - die in IS bei  $x = 0$  ruht
  - sich daher in IS' mit  $-v$  bewegt
  - zur Zeit  $t_0 = t'_0 = 0$  einen Lichtpuls aussendet

Wegen Konstanz der Lichtgeschwindigkeit,  $c = c'$ , gilt für den Lichtpuls

$$\begin{aligned}x &= ct \\x' &= ct'\end{aligned}$$

Das sieht trivial aus, ist aber der entscheidende Punkt

Nach  $t$ , resp.  $t'$  aufgelöst und in Gl. (530, 531) eingesetzt, ergibt

$$x' = a_{11}x(1 - v/c) \quad (533)$$

$$x = a_{11}x'(1 + v/c) \quad (534)$$

Gl. (534) in Gl. (533) eingesetzt und durch  $x'$  geteilt, folgt

$$1 = a_{11}^2(1 + v/c)(1 - v/c) \quad (535)$$

oder

$$a_{11}^2 = \frac{1}{1 - (v/c)^2} \quad (536)$$

Damit Galilei-Transformation für Grenzfall  $v/c \rightarrow 0$  gilt, betrachte positive Wurzel

$$a_{11}(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (537)$$

- Mit Gl. (530)

$$x' = a_{11}(v)(x - vt)$$

folgt

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (538)$$

- Mit Gl. (531)

$$x = a_{11}(-v)(x' + vt')$$

und Gl. (538) folgt nach kurzer Rechnung

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (539)$$

Die Lorentz-Transformationen

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \equiv \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z \quad (540)$$

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \equiv \gamma(t - (v/c^2)x) \quad (541)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \text{„Lorentz-Faktor“} \quad (542)$$

Bemerkungen:

- Für  $v \ll c$  bzw.  $c \rightarrow \infty$  geht  $\gamma \rightarrow 1$  und es ergibt sich die Galilei-Transformation  $x' = x - vt$ ,  $t' = t$
- Für  $v/c = 0.1$  ist  $\gamma = 1.005$ , allmählich spürbar
- Es gibt Geschwindigkeiten  $v > c$ , aber diese sind keine Transportgeschwindigkeiten für Signale, Energie oder Körper, Laserstrahl über den Mond gestrichen

- Addition von Geschwindigkeiten
  - Betrachte drei Inertialsysteme
  - IS' bewegt sich relativ zu IS mit Geschwindigkeit  $v_1$ , IS'' relativ zu IS' mit Geschwindigkeit  $v_2$
  - Zweifache Anwendung der Lorentz-Transformation ergibt das relativistische Geschwindigkeits-Additionstheorem

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} \quad (543)$$

Historische Bemerkung

- Maxwell-Gleichungen (1865) enthalten  $c$ . Insbesondere Wellengleichung für E-Feld

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E \quad (544)$$

Das hätte schon mal stutzig machen können

- Lorentz leitet 1904 seine Transformation aus der Forderung ab, dass die Maxwell-Gleichungen in allen Inertialsystemen die selbe Form haben sollen. Er hielt Raum und Zeit aber weiterhin für absolut, verstand also die Konsequenz seiner Theorie nicht
- Erst Einstein stellte dieses in seinem "annum mirabilis" 1905 klar

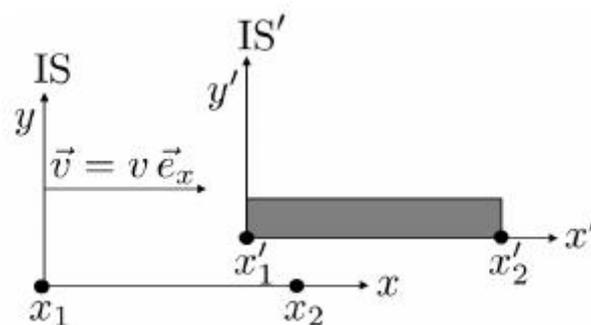
10. Do. 20

### 13.3 Längenkontraktion und Zeitdilatation

Definition: Ein Ereignis ist definiert durch sein Raum-Zeit Koordinaten  $(x, y, z, t)$ . Es hat in IS und IS' verschiedene Werte.

#### Längenkontraktion

Betrachte Inertialsysteme IS und IS' und einen in IS' ruhenden Stab der Eigenlänge  $l_0 = x'_2 - x'_1$



Längenkontraktion

Welche Stablänge ergibt sich für eine Messung in IS ?

Dazu muss zur gleichen Zeit in IS die Positionen vom Stabanfang,  $x_1$ , und Stabende,  $x_2$ , gemessen werden

- Stabende

$$\text{IS: } \quad x_1 = 0 \quad t_1 = 0 \tag{545}$$

$$\text{IS': } \quad x'_1 = 0 \quad t'_1 = 0$$

- Stabanfang

$$x_2 \quad t_2 = 0 \tag{546}$$

$$x'_2 = l_0 \quad t'_2$$

Länge des Stabes in IS ( $x_1 = 0$ )

$$l = x_2 - x_1 = x_2 \tag{547}$$

Lorentz-Transformation

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{548}$$

ergibt ( $t_2 = 0$ )

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2) \implies x_2 = l_0/\gamma \tag{549}$$

oder

$$l = l_0 \sqrt{1 - (v/c)^2} \tag{550}$$

In IS ist der Stab kürzer als seine Eigenlänge  $l_0$ , Längenkontraktion oder Lorentz-Kontraktion.

Bemerkungen

- Gl. (550) gilt, wenn Stab und Relativgeschwindigkeit  $\vec{v} = v\vec{e}_x$  parallel sind. Ist der Stab gedreht, z.B.

$$l_0^\perp \text{ in } \vec{e}_y, \quad l_0^\parallel \text{ in } \vec{e}_x, \quad l_0^2 = l_0^{\perp 2} + l_0^{\parallel 2} \tag{551}$$

so ändert sich wegen  $y' = y$  Länge senkrecht zu  $\vec{v}$  nicht

$$l_\parallel = l_0^\parallel \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad l_\perp = l_0^\perp \tag{552}$$

- Ruht der Stab in IS mit Eigenlänge  $l_0$ , so ergibt sich für Messung in IS' ebenfalls  $l = l_0/\gamma$ . Kontraktion hängt nicht vom Vorzeichen ab.
- Längenkontraktion beruht Asymmetrie der Messungen
  - In IS sind die beiden Ereignisse ( $x_1 = 0, t_1 = 0$ ) und ( $x_2, t_2 = 0$ ) gleichzeitig
  - In IS' sind die beiden Ereignisse ( $x'_1 = 0, t'_1 = 0$ ) und ( $x'_2 = l_0, t'_2$ ) nicht gleichzeitig, da mit  $t_2 = 0$  und  $x_2 = l_0/\gamma$

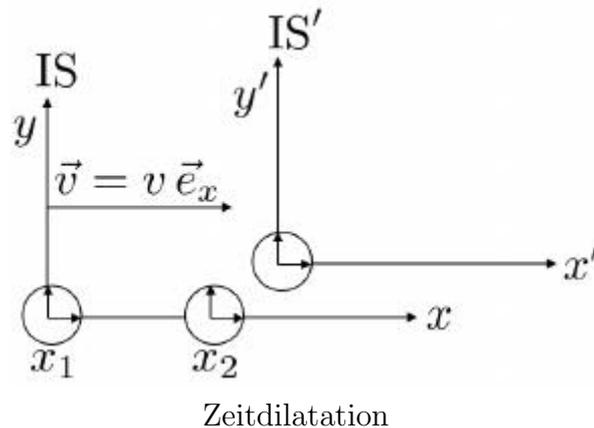
$$t'_2 = \gamma(t_2 - (v/c^2)x_2) = -\frac{v l_0}{c^2} \neq 0 \tag{553}$$

- Beachte: Theorie basiert auf einer Analyse des Messprozesses: Was bedeutet es eine Länge zu messen ? Gleichzeitig zwei Orte zu messen, und Gleichzeitigkeit hängt vom Bezugssystem ab.

20 23

### Zeitdilatation

Betrachte Gang einer Uhr in IS' von IS aus



Definiere die Ereignisse

1. Die Uhr in IS' passiert Beobachter in IS bei  $(x_1 = 0, t_1 = 0)$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & t_1 &= 0 \\ x'_1 &= 0 & t'_1 &= 0 \end{aligned} \tag{554}$$

2. Die Uhr in IS' passiert Beobachter in IS bei  $(x_2 = vt_2, t_2)$

$$\begin{aligned} x_2 &= vt_2 & t_2 & \\ x'_2 &= 0 & t'_2 & \end{aligned} \tag{555}$$

Lorentz-Transformation

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \tag{556}$$

ergibt für Ereignis 2

$$t'_2 = \frac{t_2 - (v/c^2)x_2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{t_2 - (v/c^2)vt_2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = t_2 \sqrt{1 - (v/c)^2} \tag{557}$$

Uhr in IS' zeigt für das Zeitintervall zwischen Ereignis 1 und 2

$$t_0 = t'_2 - t'_1 = t'_2 \tag{558}$$

Diese Anzeige der Uhr in IS' wird vom Beobachter in IS bei  $x_2$  zur IS-Zeit

$$t = t_2 - t_1 = t_2 \tag{559}$$

abgelesen.

Damit

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (560)$$

Wegen  $t_0 < t$  geht die bewegte Uhr in IS' gegenüber den Uhren in IS nach:  
Zeitdilatation

Bemerkungen

- Gl. (560) gilt unabhängig von der Richtung von Relativbewegung
- Asymmetrie zwischen IS und IS' in Gl. (560) resultiert aus der Asymmetrie der Messung. Wir haben zwei Uhren in IS, an denen sich eine Uhr in IS' vorbei bewegt.
- Die Zeit, die von einer Uhr, die im Inertialsystem ruht, oben  $t_0$ , gemessen wird, heißt Eigenzeit

Beispiel Myonen-Zerfall

- Myonen  $\mu^\pm$  werden durch kosmische Strahlung in etwa 10 km Höhe gebildet
- Sie zerfallen gemäß



respektive



- Im Ruhesystem des Myons gilt für ihre Anzahl:

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (563)$$

mit der mittleren Lebensdauer  $\tau = 2.19 \mu s$

- In 9 km Höhe werden  $8 \times 10^7$  Myonen gezählt
- Sie haben eine Geschwindigkeit  $v = 0.998 c$
- Wieviele Myonen kommen auf Meereshöhe an ?
- Nicht-relativistisch:  
Flugzeit  $t_f$  beträgt

$$t_f = \frac{9 \text{ km}}{0.998 c} \approx 30 \mu s \quad (564)$$

Damit

$$N(t_f) = 8 \times 10^7 \exp\left(-\frac{30}{2.19}\right) \approx 90 \quad (565)$$

- Relativistisch mit Zeitdilatation:

Flugzeit im Inertialsystem der Erde:  $t_f = 30 \mu s$

Eigenzeit der Myonen:

$$t_\mu = \sqrt{1 - (v/c)^2} t_f = \frac{t_f}{15.8} \approx 1.9 \mu s \quad (566)$$

Somit:

$$N(t_\mu) = N_0 \exp\left(-\frac{t_\mu}{\tau}\right) \approx 3.4 \times 10^7 \quad (567)$$

- Relativistisch mit Längenkontraktion

Im Bezugssystem der Myonen fliegt die Erde mit  $v = 0.998 c$

Sie legt die kontrahierte Strecke von  $9 km/15.8 = 0.57 km$  zurück

Dabei verstreicht die Eigenzeit  $t_\mu = 0.57 km/0.998 c \approx 1.9 \mu s$

Mit dem selben Ergebnis

- Kürzere Strecke oder langsamere Zeit

Technische Bemerkung:

GPS würde ohne Berücksichtigung der speziellen und auch der allgemeine Relativitätstheorie nicht funktionieren.

Kleine philosophische Nebenbemerkung:

- Eigentlich sollte das Unterkapitel nicht "Raum und Zeit" heißen, sondern "Räumliches und Zeitliches"
- Wir reden ja über Maßstäbe und Uhren
- Die sind nicht Raum und Zeit, sondern im Raum und in der Zeit, aber das ist ein anderes Thema

Lessons learned

- Experimentelle Fakten:
  - Es gibt keinen Äther als Träger der elektromagnetischen Wellen
  - Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist in allen Inertialsystemen identisch
- Gleichzeitigkeit ist relativ
- Lorentz-Transformation statt Galilei-Transformation
- Längenkontraktion & Zeitdilatation

# 14 Relativistische Mechanik

## 14.1 Vier-dimensionale Entfernung

- Im Euklidischen Raum ist die Länge  $\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$  eines Vektors  $\vec{a}$  invariant unter Drehungen und Translationen.
- Bei Newton sind Raum und Zeit in Galileo-Transformation klar getrennt
- In Relativitätstheorie "mischen" sie per Lorentz-Transformation miteinander.
- Welche Größe analog der "Länge" ist invariant unter einer Lorentz-Transformation in der vier-dimensionalen Raumzeit ?

Definition:

- Ein Raumzeitpunkt oder Weltpunkt  $(ct, \vec{r})$  definiert ein Ereignis
- Die Größe

$$s = \sqrt{c^2 (t_2 - t_1)^2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2} \quad (568)$$

heißt Abstand oder auch vier-dimensionale Entfernung zwischen zwei Ereignissen mit Weltpunkten  $(ct_1, \vec{r}_1)$  und  $(ct_2, \vec{r}_2)$

- Das Abstandsquadrat

$$s^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 \quad (569)$$

ist Lorentz-invariant

Beweis:

- Abstandsquadrat vom Ursprung:

$$s^2 = (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \quad (570)$$

- Anwenden der inversen Lorentz-Transformation

$$t = \gamma(t' + x'v/c^2), \quad x = \gamma(x' + vt') \quad (571)$$

ergibt

$$s^2 = [c\gamma(t' + x'v/c^2)]^2 - [\gamma(x' + vt')]^2 - y'^2 - z'^2 \quad (572)$$

$$= (ct')^2 \gamma^2 (1 - (v/c)^2) - x'^2 \gamma^2 (1 - (v/c)^2) - y'^2 - z'^2 \quad (573)$$

$$= (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = s'^2 \quad (574)$$

Bemerkungen

- Wir hatten oben die Lorentz-Transformation für zwei Weltpunkte abgeleitet, die auf dem Lichtkegel liegen

$$x = ct, \quad x' = ct' \quad (575)$$

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2 = 0 \quad (576)$$

Alternativ kann man die Lorentz-Transformation auch aus der Invarianz

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2 \quad (577)$$

ableiten, die für alle Weltpunkte gilt

- Für die Eigenzeit  $t_0$  einer sich mit Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$  bewegenden Uhr erhalten wir mit  $d\vec{r}(t) = \vec{v}(t) dt$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2 = c^2 \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) dt^2 = c^2 dt_0^2 \quad (578)$$

Mit  $ds^2$  ist also auch die Eigenzeit  $dt_0^2$  Lorentz-invariant

### Kausalität und Minkowski-Diagramm

- Die Relativität der Gleichzeitigkeit wirft die Frage auf, inwieweit die zeitliche Reihenfolge von Ereignissen willkürlich ist und so der Kausalität - Ursache vor Wirkung - widersprechen kann.
- Der kausale Zusammenhang zweier Ereignisse  $E_1$  und  $E_2$  wird durch das Vorzeichen seines Abstandsquadrates

$$s_{12}^2 = c^2 t_1^2 - x_1^2 = c^2 t_2^2 - x_2^2 \quad (579)$$

bestimmt.

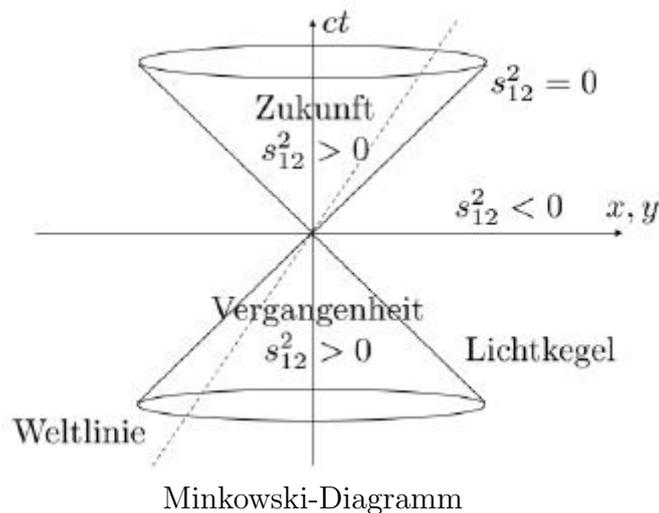
- Sei  $v$  die Geschwindigkeit, um von  $E_1$  nach  $E_2$  zu gelangen.

Es gilt

$$\begin{aligned} s_{12}^2 > 0 &: v < c \text{ zeitartig} \\ s_{12}^2 < 0 &: v > c \text{ raumartig} \\ s_{12}^2 = 0 &: v = c \text{ lichtartig} \end{aligned}$$

- $s_{12}^2 > 0$  heißt zeitartig, weil der Zeitterm größer ist als der Raumterm. Ereignisse liegen räumlich so nahe zusammen, bzw. zeitlich so weit auseinander, dass ein kausaler Zusammenhang möglich ist.
- $s_{12}^2 < 0$  heißt raumartig. Ereignisse liegen soweit auseinander, dass ein kausaler Zusammenhang nicht möglich ist.
- $s_{12}^2 = 0$  heißt lichtartig, kausaler Zusammenhang auch möglich, aber nur mit Licht

- Da  $s_{12}^2$  Lorentz-invariant ist, ist es diese Klassifikation auch



## 14.2 Relativistische Dynamik

- Die Newton'sche Mechanik ist gut für  $v/c \ll 1$ . Die relativistische Mechanik gilt auch für  $v/c \ll 1$ , muss aber für  $v/c \ll 1$  in Newton'sche Mechanik übergehen
- Relativistische Geschwindigkeiten sind in der Atom-, Kern-, und Elementarteilchenphysik relevant. Hier Energie- und Impulserhaltung wichtiger als Teilchenbahnen, da freie Zustände vor und nach der Wechselwirkung betrachtet werden, erinnere Kap. 3.2 Streuung
- Die relativistischen Gleichungen müssen unter Lorentz-Transformation forminvariant sein

### Vierer-Vektoren

- Euklidische Newton'sche Welt: Drehungen und Translationen von  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  lassen  $\vec{a}^2, \vec{b}^2$  und  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  invariant.
- Relativistische Welt: Fasse Zeit- und Raumkoordinaten zu einem Vierer-Vektor  $\underline{x}$  zusammen

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}, \quad (580)$$

$ct$ , damit alle Komponenten dieselbe Einheit haben

- Räumliche Drehung z.B. um  $\vec{e}_z$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \underline{x}' = \begin{pmatrix} ct \\ x \cos \phi + y \sin \phi \\ -x \sin \phi + y \cos \phi \\ z \end{pmatrix} \quad (581)$$

Lorentz-Transformation mit  $\vec{v} = v\vec{e}_x$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \underline{x}' = \begin{pmatrix} \gamma(ct - xv/c) \\ \gamma(x - vt) \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (582)$$

- Allgemeine Definition: Vierer-Vektoren sind alle Objekte

$$\underline{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)^T, \quad (583)$$

die sich bei räumlicher Drehung und unter Lorentz-Transformation wie  $\underline{x} = (ct, \vec{r})$  transformieren. Dabei sind

$A_0$ : zeitliche Komponente

$A_1, A_2, A_3$ : räumliche Komponenten

Die "Länge" von Vierer-Vektoren ist definiert als

$$\underline{A}^2 = \underline{A} \cdot \underline{A} := A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 \quad (584)$$

- Beachte:

- $\underline{A}^2 < 0$  ist möglich
- Aus  $\underline{A}^2 = 0$  folgt nicht  $\underline{A} = (0, 0, 0, 0)^T$
- Der Vektorraum heißt Minkowski-Raum oder pseudo-euklidischer Raum

- Skalarprodukt ist definiert als:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 \quad (585)$$

- Etwas abstrakter:

Skalarprodukt definiert eine Metrik, ein Abstandsmaß

- Im Euklidischen gilt

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \vec{r}_1^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{r}_2 \quad (586)$$

- Im Minkowski-Raum:

$$\underline{A}_1 \cdot \underline{A}_2 = \underline{A}_1^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{A}_2 \quad (587)$$

- Dieses wird in der Allgemeinen Relativitätstheorie noch "schlimmer", metrische Matrix voll besetzt
- Führt man die Multiplikation

$$\underline{A}_1^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (A_{1_0} - A_{1_1} - A_{1_2} - A_{1_3}) \quad (588)$$

aus, so sieht man, dass "normale" Vektoren und Dualraumvektoren "wirklich" unterschiedlich sind.

Sie transformieren sich auch unterschiedlich: "kovariant" und "kontravariant"

- Da das Abstandsquadrat

$$s^2 = \underline{x} \cdot \underline{x} = c^2 t^2 - \vec{r}^2 \quad (589)$$

Lorentz-invariant ist, sich alle Vierer-Vektoren wie  $\underline{x}$  transformieren, ist das Quadrat  $\underline{A}^2$  aller Vierer-Vektoren Lorentz-invariant.

- Auch das Skalarprodukt  $\underline{A} \cdot \underline{B}$  ist Lorentz-invariant, da

$$(\underline{A} + \underline{B})^2 = \underline{A}^2 + 2\underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{B}^2 \quad (590)$$

und alle anderen Terme Lorentz-invariant sind

11. Di. 20

## Relativistische Dynamik

- Gesucht : Relativistische Version des 2. Newton'schen Gesetzes

- Idee: Ersetze 3-D Vektoren der Newton'schen Mechanik  $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{p}, \vec{F}$  durch analoge Vierer-Vektoren
- Im folgenden Eigenzeit  $t_0$  mit  $\tau$  bezeichnet<sup>13</sup>

### Vierer-Geschwindigkeit:

- Die Größe

$$\frac{d\underline{x}}{dt} \quad (591)$$

ist kein Vierer-Vektor, da  $\underline{x}$  ein Vierer-Vektor ist, sich  $dt$  aber unter Lorentz-Transformation ändert.

- Da  $\underline{x}$  Vierer-Vektor und Eigenzeit  $d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$  Lorentz-invariant ist, ist die Vierer-Geschwindigkeit

$$\underline{u} := \frac{d\underline{x}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d}{dt}(ct, \vec{r}) = \gamma(c, \vec{v}) \quad (592)$$

ein Vierer-Vektor.

Wegen

$$\underline{u} \cdot \underline{u} = \frac{c^2 - v^2}{1 - v^2/c^2} = c^2 > 0 \quad (593)$$

ist sie zeitartig.

- Analog: **Vierer-Beschleunigung**

$$\underline{a} = \frac{d^2\underline{x}}{d\tau^2} = \frac{d\underline{u}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (c, \vec{v}) \right) \quad (594)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left[ - \left( \frac{1}{2} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \left( \frac{-2\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \right) \right) (c, \vec{v}) + \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (0, \vec{a}) \right]$$

$$= \gamma^2 \left( \gamma^2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} (c, \vec{v}) + (0, \vec{a}) \right) \quad (595)$$

Beachte: Mit Gl. (593) (für unten merken)

$$\frac{d}{d\tau} \underline{u} \cdot \underline{u} = 2 \underline{u} \cdot \underline{a} = \frac{d}{d\tau} c^2 = 0 \quad (596)$$

stehen Vierer-Geschwindigkeit und Vierer-Beschleunigung senkrecht aufeinander.

### Vierer-Impuls

- $m_0$ : Masse des ruhenden Körpers, die Ruhemasse.
- Definition:

$$\underline{p} = m_0 \underline{u} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (c, \vec{v}) \quad (597)$$

---

<sup>13</sup>Die 0 nervt

- Wegen (für unten merken)

$$\underline{p} \cdot \underline{p} = \frac{m_0^2}{1 - v^2/c^2} (c^2 - \vec{v}^2) = m_0^2 c^2 > 0 \quad (598)$$

ist der Vierer-Impuls zeitartig.

- Die Ruhemasse ist eine Lorentz-invariante Größe, da Vierer-Skalarprodukte Lorentz-invariant sind.
- Im Ruhesystem eines Körpers gilt

$$\underline{p} = (m_0 c, \vec{0}) \quad (599)$$

## Relativistische Masse

- Definition

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (600)$$

- Damit

$$\underline{p} = m_0 \underline{u} = m(v)(c, \vec{v}) \quad (601)$$

Masse nimmt mit steigender Geschwindigkeit zu

⇒

Je schneller ein Körper ist, desto schwerer kann er beschleunigt werden.

- Wegen

$$\lim_{v/c \rightarrow 1} m(v) \rightarrow \infty \quad (602)$$

können massive Körper nicht auf  $c$  beschleunigt werden.

- Masselose Teilchen wie Photonen haben immer  $c$ , sie haben kein Ruhesystem

## Vierer-Kraft

- Definition

$$\underline{K} = \frac{d}{d\tau} \underline{p} = m_0 \frac{d}{d\tau} \underline{u} = m_0 \underline{a} \quad (603)$$

- Betrachte die räumlichen Komponenten von  $\underline{K}$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \vec{K} \quad (604)$$

Und

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{d}{dt} (m(v) \vec{v}) = \frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F} \quad (605)$$

- Damit gilt:

$$\vec{K} = \gamma(v) \vec{F} \quad (606)$$

- Mit Definition der Vierer-Beschleunigung, Gl. (594) folgt

$$\vec{F} = m_0 \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 \gamma(v) \left( \gamma(v)^2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \vec{a} \right) \quad (607)$$

Das relativistische Analogon zum 2. Newton'schen Gesetz

Beachte:  $\vec{F}$  und  $\vec{a}$  haben i.a. verschiedene Richtungen

- Betrachte zeitliche Komponente von  $\underline{K}$ :  $K_0$

Mit Hilfe von Gl. (596)

$$\underline{K} \cdot \underline{u} = m_0 \underline{a} \cdot \underline{u} = 0 \quad (608)$$

$$= K_0 u_0 - \vec{K} \cdot \vec{u} \quad (609)$$

$$= K_0 \gamma(v) c - \gamma(v) \vec{F} \cdot \gamma(v) \vec{v} \quad (610)$$

folgt für die zeitliche Komponente

$$K_0 = \gamma(v) \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c} \quad (611)$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\underline{K} = \gamma(v) \left( \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}, \vec{F} \right) \quad (612)$$

Mit ordnungsgemäß

$$\lim_{v/c \rightarrow 0} \underline{K} = (0, \vec{F}) \quad (613)$$

Anwendung: CERN

## Masse und Energie

- Betrachte die zeitliche Komponente der Vierer-Kraft aus Gl. (611) und die zeitliche Komponente der Definition der Vierer-Kraft, Gl. (603) und der Vierer-Geschwindigkeit, Gl. (592):

$$K_0 = m_0 \frac{d}{d\tau} u_0 \quad (614)$$

Ergibt

$$K_0 = \gamma(v) \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c} = m_0 \gamma(v) \frac{d}{dt} \frac{c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (615)$$

oder

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (616)$$

$\vec{F} \cdot \vec{v}$  ist die Arbeit, die von Kraft  $\vec{F}$  pro Zeiteinheit geleistet wird

- Also muss auf der LHS der Gleichung die zeitliche Änderung der Energie stehen

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (617)$$

Eine potentielle additive Konstante kann nicht auftauchen, weil die Lorentz-Transformation für  $v \ll c$  sonst nicht in die Galileo-Transformation übergeht

Damit:

$$E = mc^2 \quad (618)$$

Äquivalenz von Masse und Energie<sup>14</sup>

- Für  $v = 0$ :  $E = m_0 c^2$

Zieht man diesen Beitrag ab, so liefert Taylorentwicklung für kleine Geschwindigkeiten  $\epsilon = v^2/c^2 \ll 1$  mit  $(1 - \epsilon)^\alpha \approx 1 - \alpha\epsilon$  für die kinetische Energie  $T$

$$T = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right) m_0 c^2 \quad (619)$$

$$\approx \left( 1 - \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) m_0 c^2 \quad (620)$$

$$= \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (621)$$

das nicht-relativistische Ergebnis

- Beachte:
  - In der Newton'schen Mechanik gibt es für die Masse  $M$  und die Energie  $E$  je einen Erhaltungssatz
  - Relativistisch nur einen für die Gesamtenergie.

22 23

## Massenverlust der Sonne

- Fusionsreaktion in der Sonne



Energie der  $\gamma$ -Strahlung  $\approx 28$  MeV

- Heliumkern leichter als 2p & 2n
- Leistung der Kernfusion:  $P \approx 3.8 \times 10^{28}$  W.
- Massenverlust der Sonne pro Sekunde:

$$m = \frac{P \cdot 1s}{c^2} = 4.3 \times 10^9 kg \quad (623)$$

- Verschmerzbar bei einer Sonnenmasse von aktuell  $M_{\text{Sonne}} \approx 2 \times 10^{30}$  kg.

## Dispersionsrelationen

- Zusammenhang zwischen Impuls und Energie heißt Dispersionsrelation und ist von fundamentaler Bedeutung
- Nicht-relativistisch:

$$E = \frac{1}{2m} p^2 \quad (624)$$

- Gl. (617) bedeutet, dass man die zeitliche Komponente des Vierer-Impulses, Gl. (597), mit  $\frac{E}{c}$  identifizieren kann

Damit folgt mit Gl. (598)

$$\underline{p} \cdot \underline{p} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m_0^2 c^2 \quad (625)$$

die relativistische Energie-Impuls Beziehung

$$E^2 = m_0^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2 \quad (626)$$

- Für masselose Teilchen folgt

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2, \quad E = |p|c \quad (627)$$

Impuls des Photons werden wir in der Quantenmechanik einführen

- Existenz = Energie

Masselose Teilchen haben nur über Impuls Energie

Geht beliebige Geschwindigkeit ?

Nein, nur  $c$ .  $v < c$ : Es gibt Inertialsystem, in dem das Teilchen ruht

- Für's Gemüt (und die Quantenmechanik): Energie hat etwas mit Zeit zu tun, Impuls etwas mit Raum

Erster Eindruck davon beim Noether-Theorem:

- Zeitinvarianz ergab Energieerhaltung
- Räumliche Translationsinvarianz ergab Impulserhaltung

- Klassisch ist beim Wurzel-Ziehen der relativistischen Energie-Impuls Beziehung

$$E = \pm \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (\vec{p}c)^2} \quad (628)$$

nur das positive Vorzeichen sinnvoll.

- Für Quantenmechanik ist auch das negative Vorzeichen sinnvoll
  - Dirac-Gleichung

- Vorhersage von Anti-Teilchen, Positron, 1928 durch Dirac, Nobelpreis 1933
- Experimentelle Bestätigung 1932 durch Anderson, Nobelpreis 1936

#### Lessons learned

- $s^2 = c^2t^2 - x^2$  ist Lorentz-invariant
- Massive Körper können nicht auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden.
- Masselose Teilchen bewegen sich stets mit Lichtgeschwindigkeit
- $E = mc^2$ : Äquivalenz von Masse und Energie
- Relativistische Dispersionsrelation:  $E^2 = m_0^2c^4 + \vec{p}^2c^2$
- Für masselose Teilchen:  $E = |p|c$

Was es in der Klassischen Mechanik noch so gibt

- Hamilton-Jacobi Formalismus
- Symplektische Geometrie, Darboux-Theorem
- Solitonen, Korteweg - de Fries Gleichung
- Integrierte Systeme, Toda-System
- Hamilton'sches Chaos, Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) Theorem
- Dissipatives Chaos, Fraktale Dimensionen, Lyapunov-Exponenten, Lorenz-System: "Deterministic nonperiodic flow" (1963), Synchronisation, Arnold Zungen