Theoretische Physik IV: Statistische Physik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer, WS 2017/18)

Aufgabenzettel Nr. 10

Achtung: Abgabe am Montag, den 8.1.18, 11-12 h, im 2. Stock Hochhaus, Zi. 210.

Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name des Tutors und Ihrem Namen deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Weihnachtsaufgabe **(7 Pkt.)**

Weihnachtsmann und Christkind sind dieses Jahr unter Zeitdruck und lassen die Geschenke zufällig auf alle Haushalte verteilen. In Deutschland gibt es ca. 40 Mio. Haushalte, 8 Mio. davon mit Kindern. Dabei leben in den Haushalten mit Kindern zu 53% ein Kind, 36% zwei Kinder, 8.7% drei Kinder und 2.3% vier oder mehr Kinder.

i.) Der Weihnachtsmann verteilt die Geschenke zufällig auf die Haushalte und merkt sich dabei auch nicht, welcher Haushalt schon ein Geschenk bekommen hat (Ziehen mit Zurücklegen). Er verteilt genau so viele Geschenke wie es Kinder gibt. Wie viel Prozent der Kinder erhalten dann (mindestens) ein Geschenk von ihm? **(2 Pkt.)**

ii.) Das Christkind hingegen merkt sich, in welchen Haushalt es schon ein Geschenk gelegt hat und stellt sicher, dass jeder Haushalt höchstens ein Geschenk bekommt. Ansonsten verteilt es genau wie der Weihnachtsmann so viele Geschenke wie es Kinder gibt und verteilt sie zufällig. Wie viel Prozent der Kinder erhalten ein Geschenk vom Christkind? **(2 Pkt.)**

iii.) Ist eine der beiden Strategien optimal, um bei der gegebenen Unkenntnis über den Aufenthaltsort der Kinder möglichst vielen Kindern ein Geschenk zukommen zu lassen? **(3 Pkt.)**

Hinweis: Vernachlässigen Sie Haushalte mit mehr als vier Kindern und nehmen sie 2.3% als den Anteil der kinderreichen Haushalte mit vier Kindern an.

Aufgabe 2: Benfordsches Gesetz **(7 Pkt.)**

Gegeben sei eine Zufallsvariable

$$x = \prod_{i=1}^{N} r_i,$$

wobei gelte, dass für alle i, $\ell_i = \ln(r_i)$ aus einer Verteilung $P(\mu = \bar{\ell}, \sigma^2 = \sigma_\ell^2)$ mit definiertem Mittelwert μ und Varianz σ^2 gezogen sei.

i.) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion $p(x)$ für große Werte von N durch

$$p(x) = \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi N \sigma_\ell^2}} e^{-\frac{(\ln x - N\bar{\ell})^2}{2N\sigma_\ell^2}}$$

gegeben ist. **(2 Pkt.)**

ii.) Interpretieren Sie x als eine Zahl in Dezimaldarstellung. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit p_d dafür, dass x mit der Ziffer $d = 1, \ldots, 9$ beginnt nicht gleichtverteilt ist, sondern durch

$$p_d = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right) = \log_{10}(d+1) - \log_{10}(d) \tag{1}$$

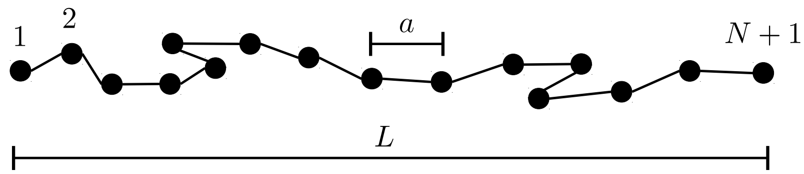
gegeben ist. *Hinweis:* Benutzen Sie die Verteilungsfunktion für $\ln(x)$ und approximieren Sie diese durch eine abschnittweise konstante Funktion. **(3 Pkt.)**

iii.) Zeigen Sie, dass Gl. (1) auch unverändert für eine Zahl $y = \alpha x$ gilt, welche Sie z.B. durch Umrechnen von x in eine andere Einheit erhalten. **(2 Pkt.)**

Bemerkung: Mit der Darstellung $x = d \cdot 10^a$ und der Forderung nach Skaleninvarianz folgt unmittelbar, dass $\log_{10}(d)$ gleichverteilt sein muss, und damit auch $\log_{10}(x)$ selbst. Viele in der Natur vorkommende Messgrößen streuen über Größenordnungen hinweg und ihr Logarithmus kann daher um den Mittelwert herum als gleichverteilt angenommen werden. Diese Größen folgen in sehr guter Näherung dem Benford'schen Gesetz.

Aufgabe 3: Polymerkette **(5 Pkt.)**

Ein Polymer werde durch eine Kette von $N+1$ Kugeln, sogenannten Monomeren, die durch N Bindungen ($N \gg 1$) der Länge a verknüpft sind, modelliert (siehe Skizze). In einer pseudo-eindimensionalen Situation kann jede Bindung entweder nach links oder nach rechts zeigen ($N = N_l + N_r$). Dabei hängt die Energie der Bindung nicht von der Orientierung ab.



i.) Bestimmen Sie die Kraft $f = \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_T$, die benötigt wird, um beide Enden des Polymers bei der Temperatur T auf dem Abstand L zu halten. Hierbei bezeichnet F die freie Energie. *Hinweis:* Bestimmen Sie die Entropie der Kette aus der Anzahl der Konfigurationen der Länge N. **(3 Pkt.)**

ii.) Bestimmen Sie die Elastizitätskonstante $\kappa_{\text{el}} = \left(\frac{\partial f}{\partial L}\right)_T$ des Polymers für den Fall stark gefalteter Ketten, d.h. $L \ll Na$. **(2 Pkt.)**

Aufgabe 4: Lagrange-Multiplikatoren **(6 Pkt.)**

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbare Funktionen. Im folgenden sollen nun Extrempunkte der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(\vec{x}) = 0$ untersucht werden.

i.) Sei $\vec{x}_0$ ein lokaler Extrempunkt von f unter der Nebenbedingung $g(\vec{x}) = 0$ und $\nabla g(\vec{x})|_{\vec{x}_0} \neq 0$. Beweisen Sie, dass im Punkt $\vec{x}_0$ die Gradienten von f und g parallel sind, d. h. es existiert ein λ, so dass

$$\nabla f(\vec{x})|_{\vec{x}_0} = \lambda \, \nabla g(\vec{x})|_{\vec{x}_0} \, .$$

Hinweis: Nutzen Sie den Satz über die implizite Funktion, um die Nebenbedingung lokal um den Extrempunkt nach einer Variablen (z.B. x_n) aufzulösen. **(2 Pkt.)**

ii.) Zeigen Sie, dass

$$\nabla_{(\vec{x},\lambda)} L(\vec{x}, \lambda) = 0 \text{ mit } L(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) - \lambda g(\vec{x})$$

äquivalent zu den Bedingungen

$$\nabla f(\vec{x}) = \lambda \nabla g(\vec{x}) \text{ und } g(\vec{x}) = 0$$

ist. **(1 Pkt.)**

iii.) Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = y$ mit der Nebenbedingung $g_1(x, y) = y^3 - x^2 = 0$. Zeichnen Sie den Graph von $g_1(x, y) = 0$ und finden Sie daraus das Minimum von f unter der Nebenbedingung. Zeigen Sie, dass die Gradienten von f und g am Minimum nicht parallel sind. Warum ist dies kein Widerspruch zur bewiesenen Aussage im ersten Teil der Aufgabe? Wie lautet das Minimum von f unter der Nebenbedingung $g_2(x, y) = y^3 - x^2 - 1 = 0$. **(2 Pkt.)**

iv.) Die Parallelität der Gradienten ist nur eine notwendige Bedingung für einen lokalen Extrempunkt. Geben Sie ein Beispiel an, für welches nicht alle Lösungen der Gleichung $\nabla_{(\vec{x},\lambda)} L(\vec{x},\lambda) = 0$ einen Extrempunkt liefern. Wie erhält man hinreichende Bedingungen? (Stichpunkt reicht) **(1 Pkt.)**

Münsteraufgabe

Auf der Höhe der äußeren Treppe zur obersten Aussichtsebene befinden sich sieben große Figuren. Was amüsierte einen Kirchenvertreter aus Konstanz bei der Feier nach der Renovierung um 1900, bei der eine dieser Figuren durch eine Figur des Domkapitulars ersetzt worden war?