Theoretische Physik IV: Statistische Physik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer, WS 2017/18)

Aufgabenzettel Nr. 6

Abgabe am Freitag, den 24.11.17 nach der Vorlesung. Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name des Tutors und Ihrem Namen deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Gibbs-Helmholtz-Gleichung **(1 Pkt.)**

Zeigen Sie, dass die freie Enthalpie G mit deren Ableitungen nach der Temperatur T und die Enthalpie H durch die Gibbs-Helmholtz-Gleichung

$$H = G - T\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p,N} = -T^2\left(\frac{\partial (G/T)}{\partial T}\right)_{p,N}$$

verknüpft sind.

Aufgabe 2: Dritter Hauptsatz **(4 Pkt.)**

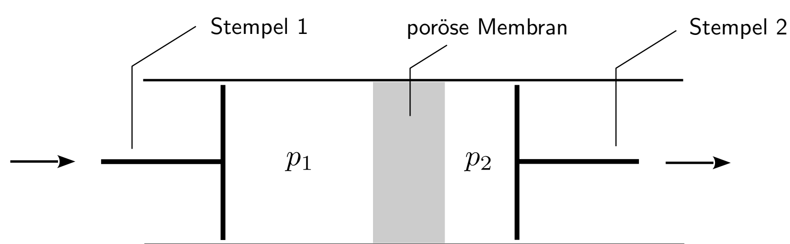
Ein Gas eindimensionaler akustischer Phononen mit quadratischer Dispersionsrelation genügt den Zustandsgleichungen

$$p = \frac{U}{V} \quad \text{und} \quad T = \frac{3BU^{\frac{2}{3}}}{(NV)^{\frac{1}{3}}},$$

wobei $B > 0$ eine Konstante ist. Zeigen Sie, dass das Phononengas mit dem dritten Hauptsatz vereinbar ist.

Aufgabe 3: Joule-Thomson-Effekt **(7 Pkt.)**

Ein Gas werde unter konstantem Druck p_1 durch eine poröse Trennwand von einer Kammer in eine zweite, unter dem konstanten Druck $p_2 < p_1$ stehende, Kammer gedrückt. Die Konstanz der Drücke in den Kammern wird durch Vergrößern bzw. Verkleinern ihrer Volumina gewährleistet, siehe Skizze.



Schließlich wird angenommen, dass das Gas adiabatisch von der Umgebung isoliert ist und somit mit dieser Energie nur in Form von Arbeit austauscht.

i.) Zeigen Sie, dass die gesamte Enthalpie H bei diesem Prozess konstant ist. **(1 Pkt.)**

ii.) Zeigen Sie, dass

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{1}{C_p}\left(T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V\right)$$

gilt und berechnen Sie $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$ explizit für das ideale Gas. **(3 Pkt.)**

iii.) Für van-der-Waals Gase erhält man näherungsweise

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{1}{C_p}\left(\frac{2a}{RT} - b - 3\frac{abp}{R^2T^2}\right)$$

Im p-T-Diagramm ist die sogenannte Inversionskurve $p(T)$ durch die Bedingung $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = 0$ definiert. Geben Sie die Inversionskurve für van-der-Waals Gase an und plotten Sie sie für Stickstoff mit $a = 0.141\,\mathrm{m^6\,Pa\,mol^{-2}}$ und $b = 0.039 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3\,mol^{-1}}$. Interpretieren Sie die Gebiete oberhalb und unterhalb dieser Kurve physikalisch. Zeichnen Sie schematisch eine Isenthalpe ($H = \text{const.}$) in das p-T-Diagramm. **(3 Pkt.)**

Aufgabe 4: Summe von Zufallsvariablen **(6 Pkt.)**

Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen, die den Verteilungsfunktionen $\phi_X \in L^2(\mathbb{R})$ und $\phi_Y \in L^2(\mathbb{R})$ folgen. Ihre Mittelwerte seien mit $\langle X\rangle = \bar{X}$ und $\langle Y\rangle = \bar{Y}$ bezeichnet, ihre Varianzen mit $\mathrm{Var(X)} = \sigma_X^2$ und $\mathrm{Var(Y)} = \sigma_Y^2$.

i.) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $Z = X + Y$ durch

$$\phi_Z(z) = \int \phi_X(x)\phi_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

gegeben ist. Starten Sie von der gemeinsamen Verteilungsfunktion $\phi_{XY} \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Wie lautet diese? **(2 Pkt.)**

ii.) Seien nun X und Y normalverteilt, d.h.

$$\phi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x-\bar{X})^2}{2\sigma_X^2}} \qquad \phi_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} e^{-\frac{(y-\bar{Y})^2}{2\sigma_Y^2}}$$

Zeigen Sie, dass auch $Z = X + Y$ normalverteilt ist und lesen Sie aus der Verteilungsfunktion $\bar{Z}$ und σ_Z^2 ab. *Hinweis:* Rechnen rechnen rechnen und keine Vorfaktoren auf der Strecke verlieren. **(2 Pkt.)**

iii.) Wählt man ϕ_X und ϕ_Y wieder allgemein, so lassen sich Mittelwert und Varianz von $Z = X + Y$ als

$$\bar{Z} = f(\bar{X}, \bar{Y})$$
$$\sigma_Z^2 = f(\sigma_X^2, \sigma_Y^2)$$

schreiben. Bestimmen Sie die Funktion f. **(2 Pkt.)**

Münsteraufgabe

Der Chor des Münsters ist ganz leicht gegen das Hauptschiff geneigt. Warum?