

Punkt-Attraktor

periodische
Attraktoren

Lyapunov Exponent

unendliche
Periodenverdopplung

Skalierung und
Selbstähnlichkeit

Feigenbaum-
Konstanten

Chaotische Dynamik

Kritischer Parameter

Strukturen im Chaos

Spektrum

Julia- und
Mandelbrotmengen

Die logistische Abbildung

Jakob Nawrath

3. Mai 2005

Gliederung

1 Die logistische Abbildung

2 Dynamik

Punkt-Attraktor

periodische Attraktoren

Lyapunov Exponent

unendliche Periodenverdopplung

Skalierung und Selbstähnlichkeit

Feigenbaum-Konstanten

Chaotische Dynamik

3 Komplexität an der Grenze zwischen Regularität und Chaos

Kritischer Parameter

Strukturen im Chaos

Spektrum

Julia- und Mandelbrotmengen

Szenarien einer Population

- Szenario I: nach einigen Jahren stabil
- Szenario II: zyklisches Verhalten
- Szenario III: chaotische Schwankungen

logistische Abbildung

Pierre Francois Verhulst (1804-1849):

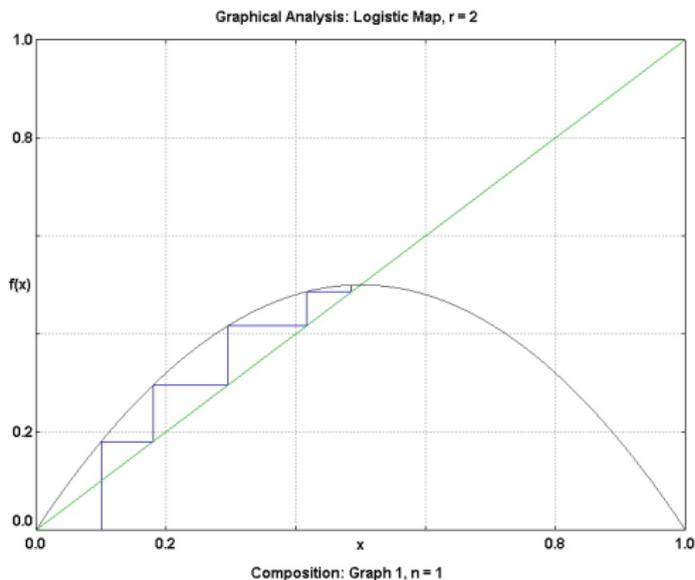
- logistische Gleichung $\frac{dx}{dt} = r \cdot x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = rx(1 - x)$
- Iterierte Differenzengleichung: **logistische Abbildung**

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_0 \in [0, 1]$$

mit $f(x) = rx(1 - x), \quad r \in [0, 4]$

- nichtlinear, rückgekoppelt
- bildet $[0, 1]$ auf sich selbst ab

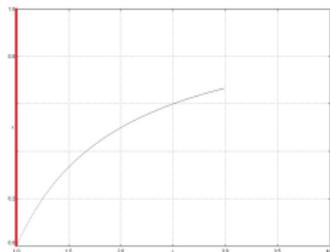
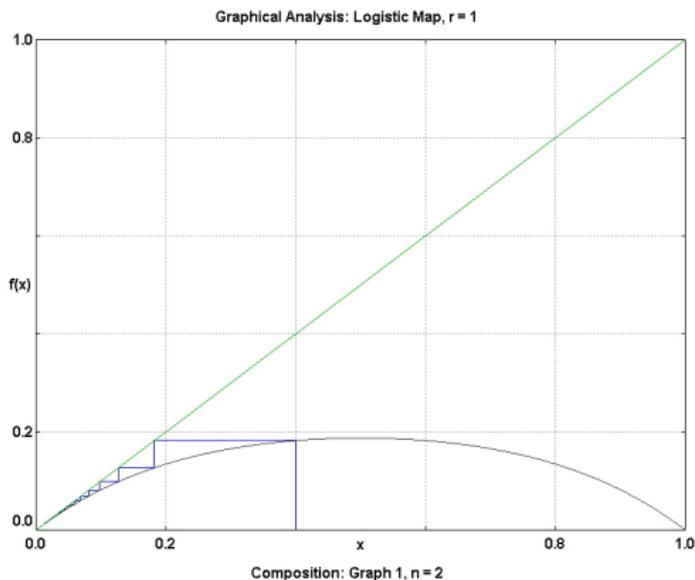
Beschreibung der Generationenfolge



Stabilität:
Untersuche

- Parameter
- Startwerte

Beschreibung der Generationenfolge



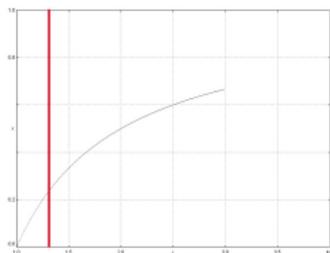
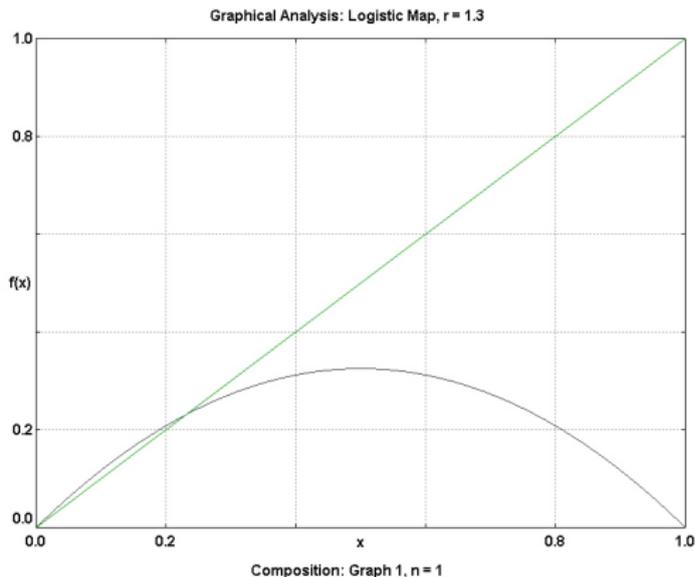
Fixpunkte

- $f(x^*) = x^* \Rightarrow x_0^* = 0, x_1^* = 1 - \frac{1}{r}$
- **Stabilität:**
- \Leftrightarrow Attraktor A
 - A invariant unter Dynamik
 - A attraktiv
 - A kann nicht zerlegt werden

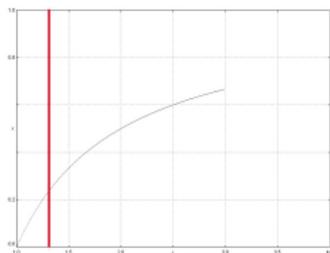
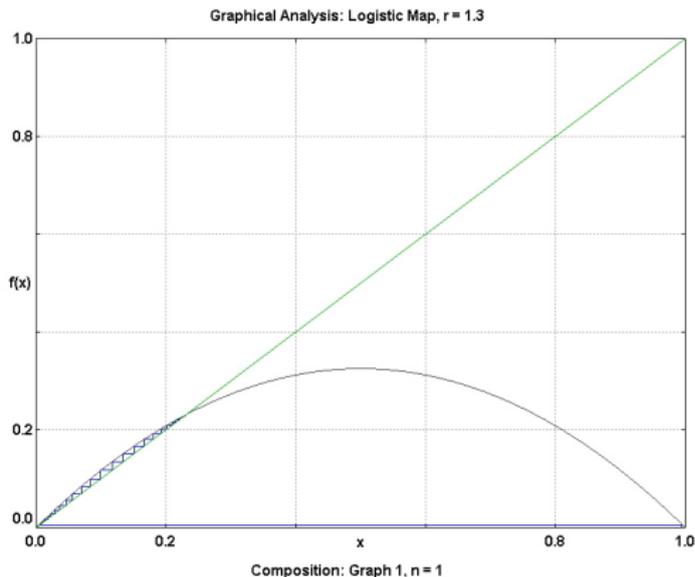
Fixpunkte

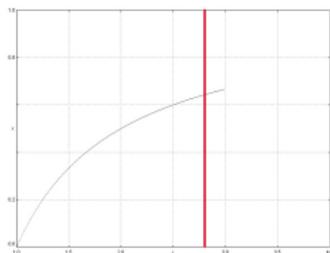
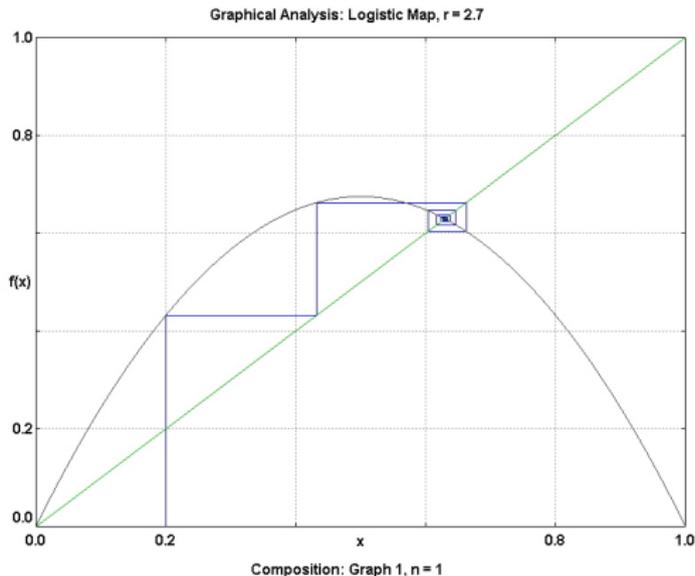
- $f(x^*) = x^* \Rightarrow x_0^* = 0, x_1^* = 1 - \frac{1}{r}$
- **Stabilität:**
- $|f'(x^*)| < 1$
 $f'(x_0^*) = r; \quad \Rightarrow x_0^* = 0 \quad \text{für} \quad r < 1 \text{ attraktiv}$
 $f'(x_1^*) = 2 - r \Rightarrow x_1^* = 1 - \frac{1}{3} \text{ für } 1 < r < 3 \text{ attraktiv}$

Punkt-Attraktor



Punkt-Attraktor





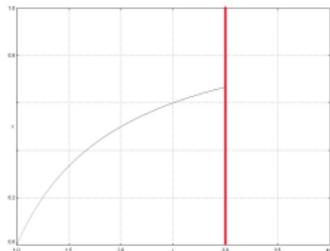
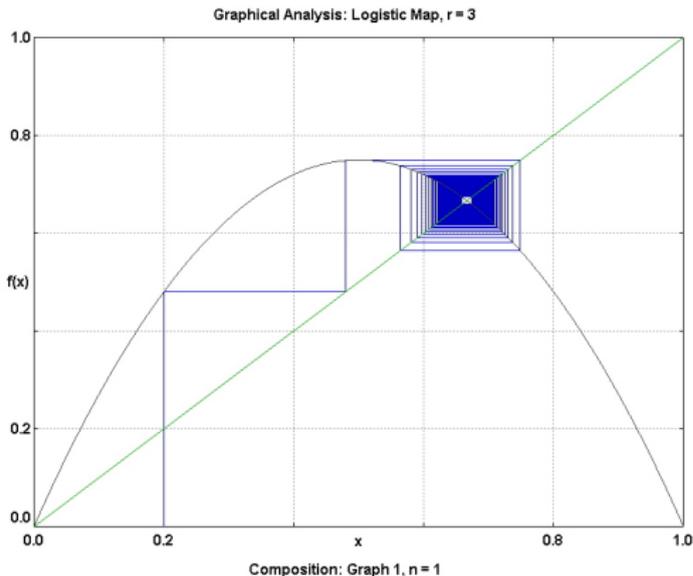
Punkt-Attraktor

Punkt-Attraktor

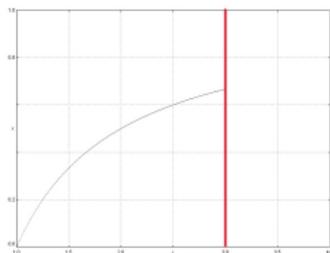
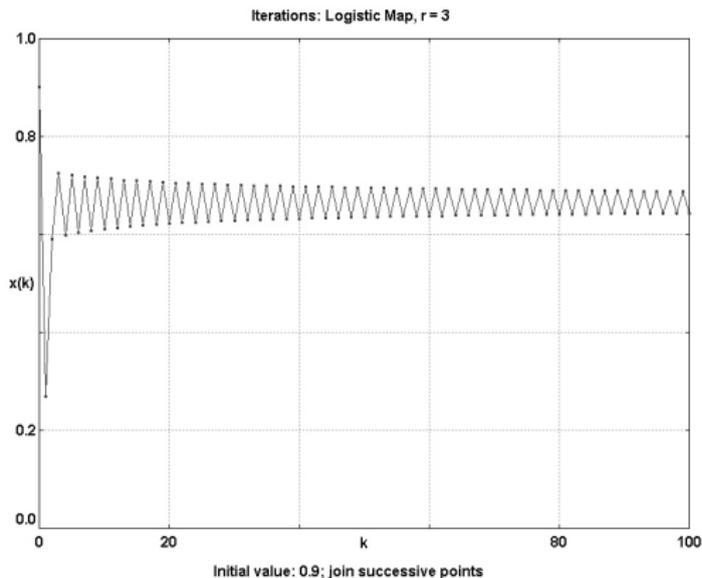
- periodische Attraktoren
- Lyapunov Exponent
- unendliche Periodenverdopplung
- Skalierung und Selbstähnlichkeit
- Feigenbaum-Konstanten
- Chaotische Dynamik

**Komplexität
zwischen
Regularität
und Chaos**

- Kritischer Parameter
- Strukturen im Chaos
- Spektrum
- Julia- und Mandelbrotmengen



Punkt-Attraktor



periodische Attraktoren

Punkt-Attraktor

**periodische
Attraktoren**

Lyapunov Exponent
unendliche
Periodenverdopplung

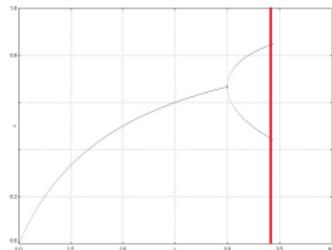
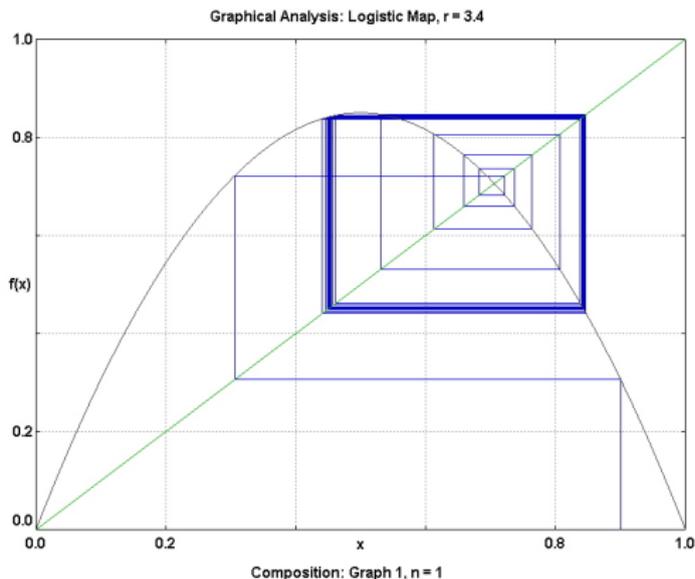
Skalierung und
Selbstähnlichkeit

Feigenbaum-
Konstanten

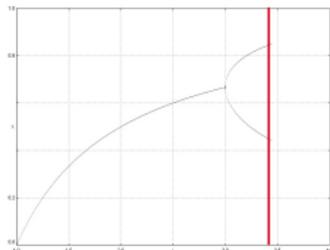
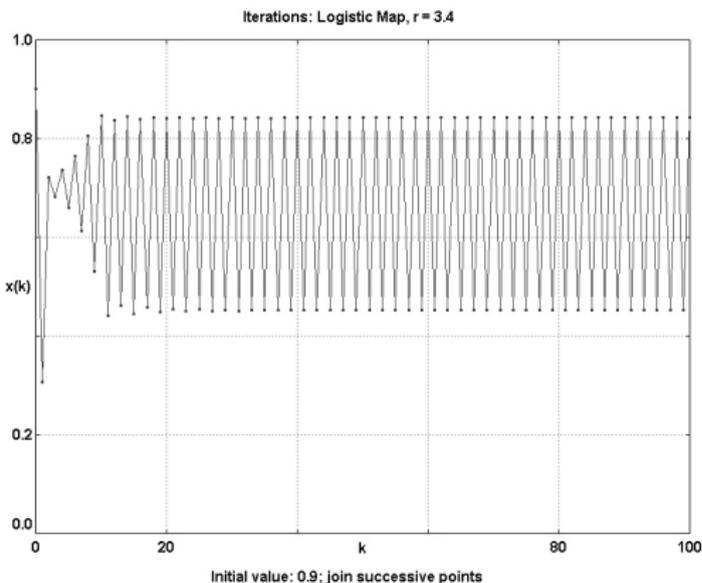
Chaotische Dynamik

Komplexität
zwischen
Regularität
und Chaos

Kritischer Parameter
Strukturen im Chaos
Spektrum
Julia- und
Mandelbrotmengen



periodische Attraktoren



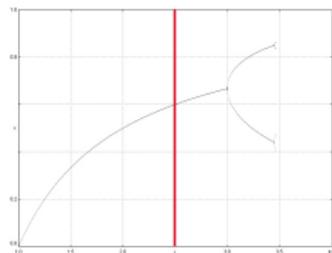
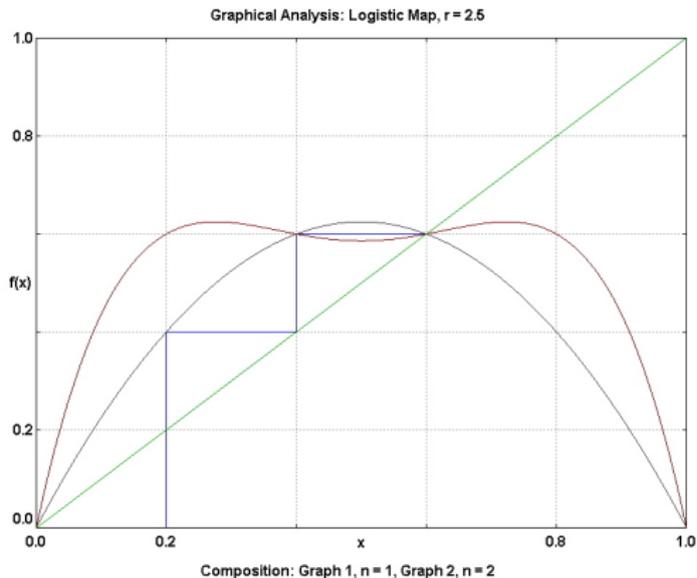
periodische Attraktoren

- Instabilität $\xrightarrow{?}$ Periodenverdopplung, Bifurkation
- Periode 2 $\Leftrightarrow x_n = x_{n+2}$
- Betrachte $f^2(x) = (f \circ f)(x)$
 - x_1^*, x_2^* Fixpunkte
 - invariant bzgl. Komposition von f
 - stabil für $3 < r < 1 + \sqrt{6}$

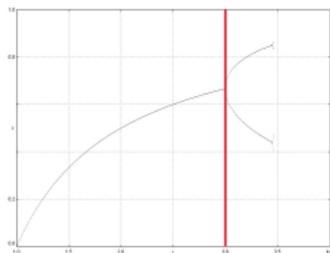
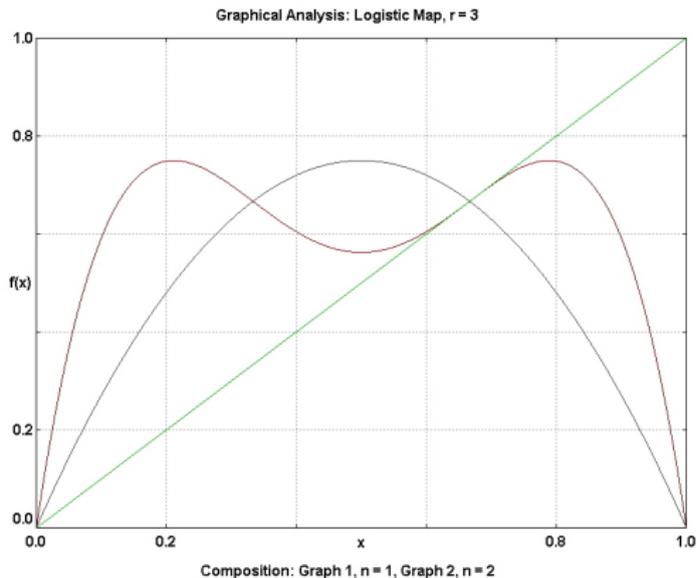
periodische Attraktoren

- Instabilität $\xrightarrow{?}$ Periodenverdopplung, Bifurkation
- Periode 2 $\Leftrightarrow x_n = x_{n+2}$
- Betrachte $f^2(x) = (f \circ f)(x)$
 - x_1^*, x_2^* Fixpunkte
 - invariant bzgl. Komposition von f
 - stabil für $3 < r < 1 + \sqrt{6}$

Iterierte Abbildung



Iterierte Abbildung



Punkt-Attraktor

periodische
Attraktoren

Lyapunov Exponent

unendliche

Periodenverdopplung

Skalierung und
Selbstähnlichkeit

Feigenbaum-
Konstanten

Chaotische Dynamik

Komplexität
zwischen
Regularität
und Chaos

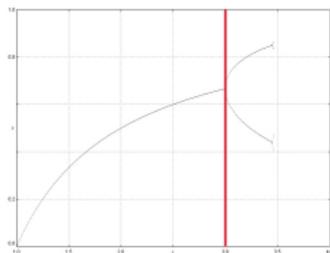
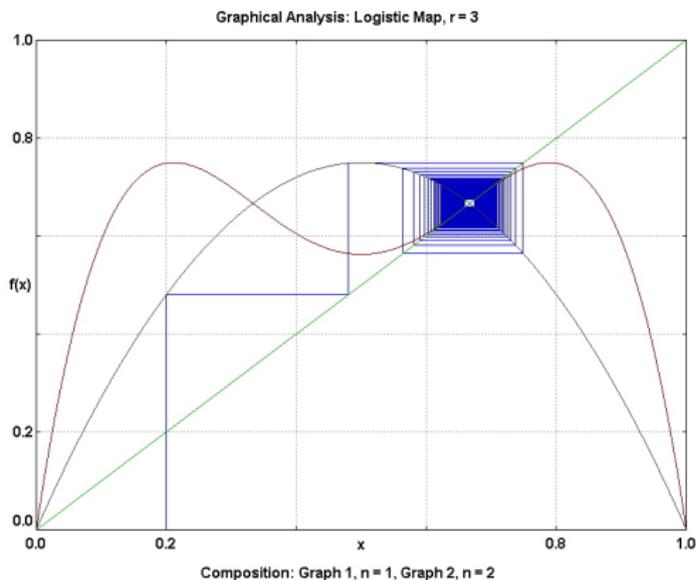
Kritischer Parameter

Strukturen im Chaos

Spektrum

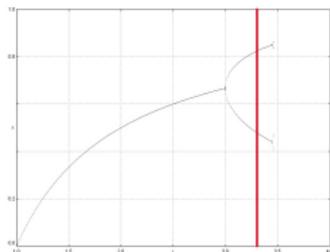
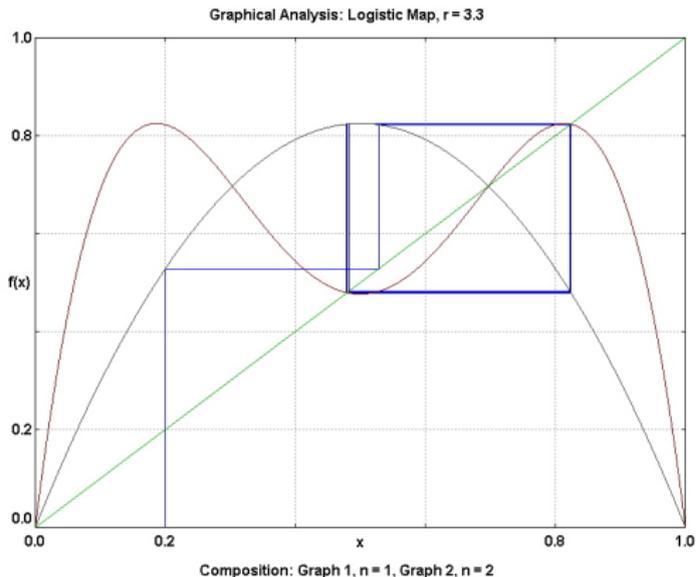
Julia- und
Mandelbrotmengen

Iterierte Abbildung



periodische Attraktoren

Iterierte Abbildung



- instabiler x^* wird nicht mehr besucht

Lyapunov Exponent der Attraktoren

- Prozess läuft von abstoßenden Fixpunkten zu attraktiven
- Annäherungsgeschwindigkeit: Maß für „Anziehungskraft“ des Attraktors

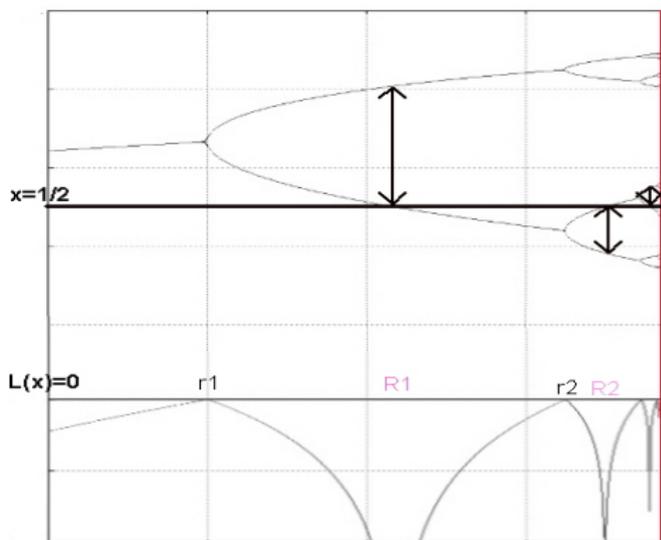
Lyapunov Exponent der Attraktoren

- Maß für lokale Divergenz der Trajektorien

$$\begin{aligned}\lambda(x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log |f'(x_i)| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log |r - 2rx_n|\end{aligned}$$

- Stabilität $\rightarrow \lambda < 0$ also Invarianz unter kleinen Störungen der x_0
- bei $\lambda = 0$ Fixpunkt instabil, nicht mehr Teil der Dynamik

Periodenverdopplung bei r_{∞} Lyapunov Exponent



qualitative
Charakterisierung und
Skalenverhalten der
Achsen

- $1 < r < 3$: $\lambda(x_1^*) = \ln |2 - r| < 0$
- $3 < r < 1 + \sqrt{6}$: $\lambda(x_2^*) = \frac{1}{2} \ln |4 + 2r - r^2| < 0$

Skalierung und Selbstähnlichkeit

n Iterationen $\rightarrow 2^n$ Fixpunkte

Skalierung und Selbstähnlichkeit

n Iterationen $\rightarrow 2^n$ Fixpunkte

$$d_n = f_{R_n}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \rightarrow d_n = f_{R_n}^{2^{n-1}}(0)$$

Skalierung und Selbstähnlichkeit

n Iterationen $\rightarrow 2^n$ Fixpunkte

$$d_n = f_{R_n}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \rightarrow d_n = f_{R_n}^{2^{n-1}}(0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n d_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{R_{n+1}}^{2^n} = d_1$$

Skalierung und Selbstähnlichkeit

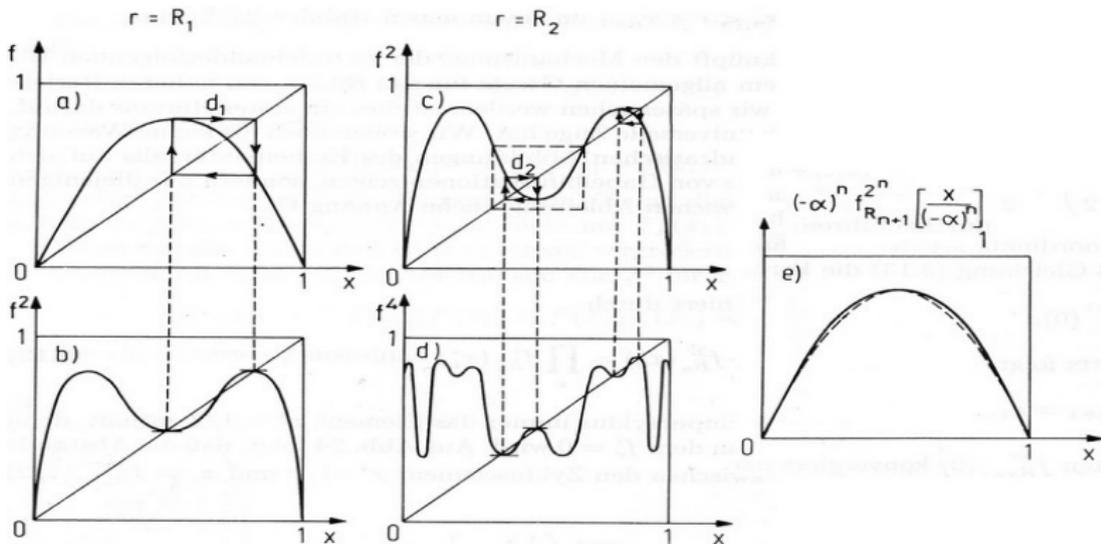
n Iterationen $\rightarrow 2^n$ Fixpunkte

$$d_n = f_{R_n}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \rightarrow d_n = f_{R_n}^{2^{n-1}}(0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n d_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{R_{n+1}}^{2^n} = d_1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{R_{n+1}}^{2^n} \left[\frac{x}{(-\alpha)^n} \right] = g_1(x)$$

Skalierung und Selbstähnlichkeit



$$g_i(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{R_{n+i}}^{2^n} \left[\frac{x}{(-\alpha)^n} \right] = g_1(x)$$

Skalierung und Selbstähnlichkeit

$$g_i(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{\mathbb{R}_{n+i}}^{2^n} \left[\frac{x}{(-\alpha)^n} \right] = g_1(x)$$

Verdopplungsoperator T verbindet all diese Funktionen und skaliert Feigenbaumkonstante α :

$$Tg_i(x) \equiv -\alpha g_i[g_i(-x/\alpha)]g_{i-1}(x)$$

für $i \rightarrow \infty$ folgt als Fixpunkt von T :

$$g(x) = Tg(x) = -\alpha g \left[g \left(-\frac{x}{\alpha} \right) \right]$$

- Diese Gleichung bestimmt α als universellen Wert
- keine allgemeine Theorie für die Lösung

Feigenbaumkonstanten

- Die Abstände d_n zwischen $x = 1/2$ und dem nächsten Punkt eines 2^n -Zyklus haben konst. Verhältnisse:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = 2.502907 \dots$$

- $r_\infty = s_\infty = 3.5699456 \dots$

-

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n} = 4,6692 \dots$$

- Die Parameterwerte r_n , an denen die Zahl der Fixpunkte von 2^{n-1} nach 2^n wechselt, skalieren wie

$$r_n = r_\infty - \text{const} \cdot \delta^{-n} \quad \text{für } n \gg 1$$

- Die superstabile Zyklen R_n skalieren wie

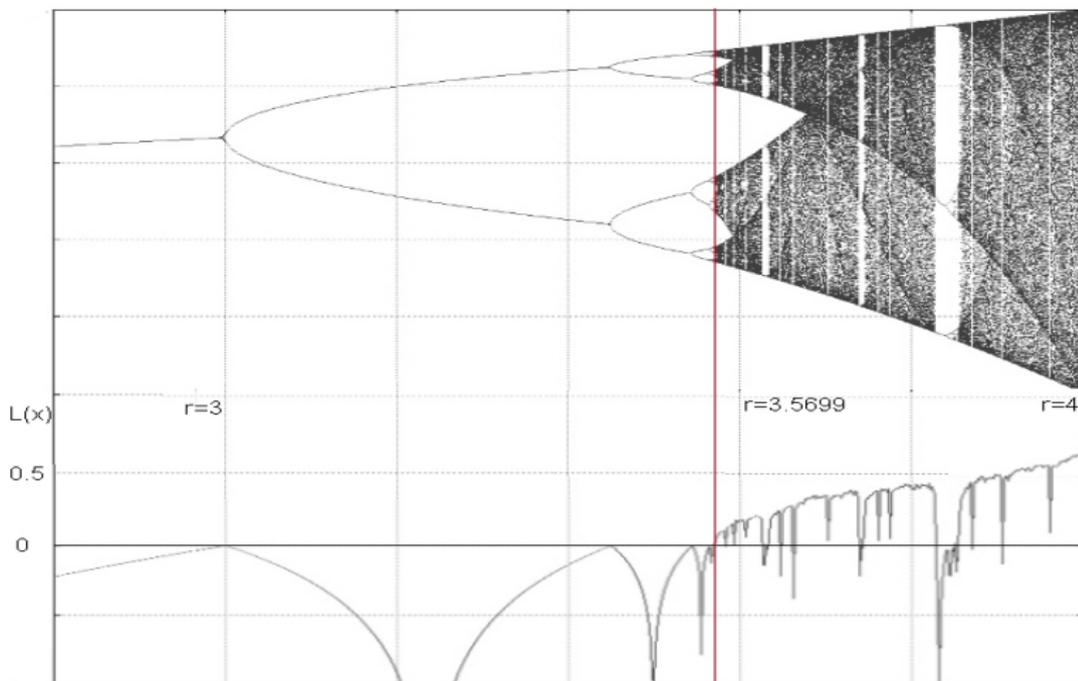
$$R_n - r_\infty = \text{const}' \cdot \delta^{-n}$$

Chaotische Dynamik

Lyapunov Exponenten

- Punkt-Attraktor
- periodische
Attraktoren
- Lyapunov Exponent
- unendliche
Periodenverdopplung
- Skalierung und
Selbstähnlichkeit
- Feigenbaum-
Konstanten

- Kritischer Parameter
- Strukturen im Chaos
- Spektrum
- Julia- und
Mandelbrotmengen



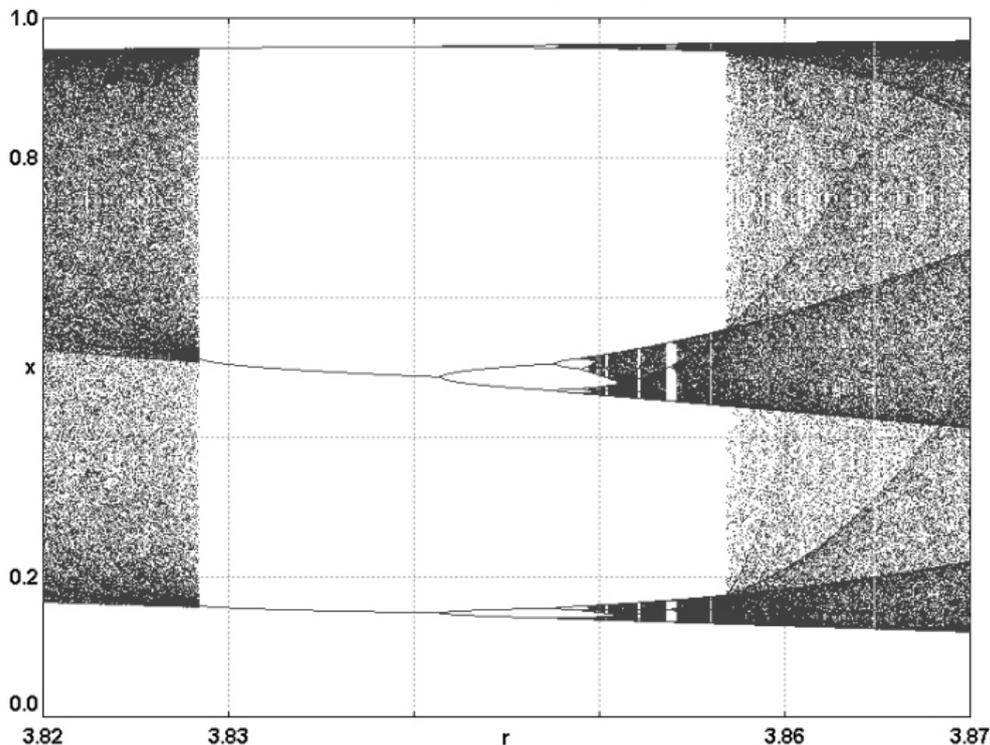
Komplexität an der Grenze zwischen Regularität und Chaos

- r_∞ hat herausragende Bedeutung
- Folge k der Periodenverdopplungen $\rightarrow 3.56994\dots$
- Feigenbaumattraktor
- kritischer Reproduktionsparameter
- aperiodisch
- nach endlicher Zeit ∞ instabile Fixpunkte, aber keine stabilen mehr
 \rightarrow Dynamik wird von einem Repellor zum nächsten getrieben
- hierarchische Selbstähnlichkeit

Strukturen im Chaos

periodische Fenster

Bifurcation Diagram: Logistic Map

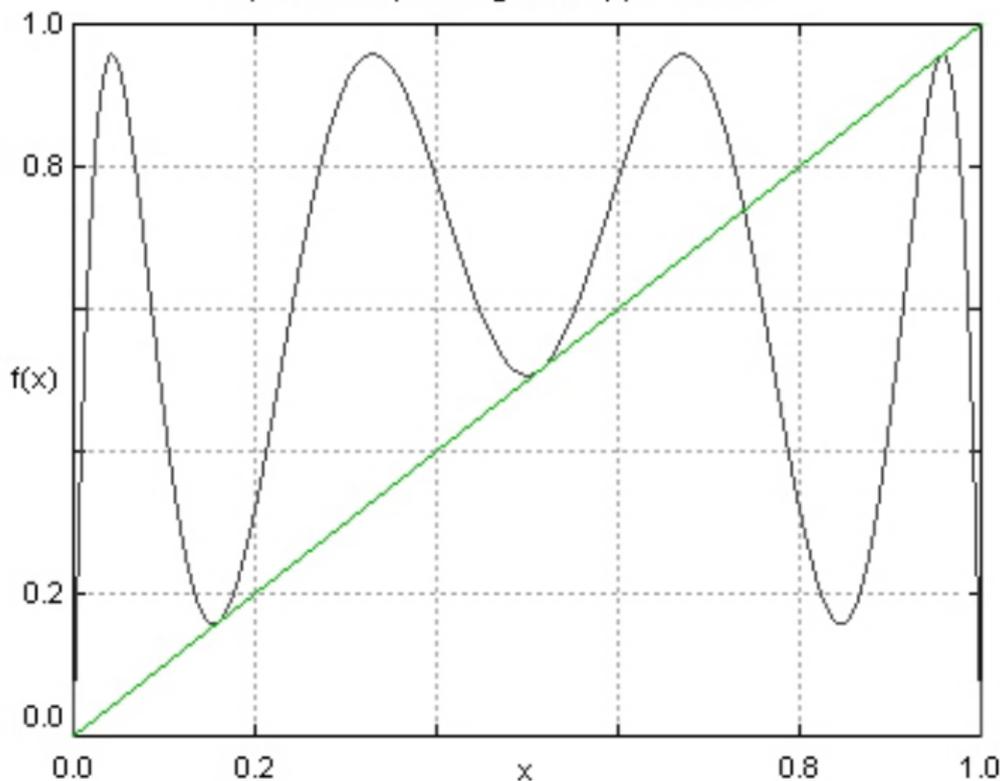


Initial value: 0.499999; discard first 500 display next 500 iterations

Strukturen im Chaos

Tangenten-Bifurkation

Graphical Analysis: Logistic Map, $r = 3.8284$



Strukturen im Chaos

- Intermittenz durch Tangentenbifurkation
- Periodenverdreifachungen $p \cdot 3^n$ etc.
- sensible Parameterabhängigkeit
- Breite der periodischen Bereiche durch $\epsilon = r - r_\infty$ festgelegt:

$$\langle I \rangle \propto \epsilon^{-1/2}$$

- r -Werte skalieren mit δ , aber anderen Konstanten.
- Renormierungsgruppengleichungen können exakt gelöst werden

- Zerlege Elemente $x_n(t)$ eines 2^n -Zyklus für $(t = 1, 2, \dots, 2^n \equiv T_n)$ in Fourierkomponenten a_k^n :

$$x^n(t) = \sum_k a_k^n e^{\frac{2\pi i k}{T_n} t}$$

- Die Periodizität des Zyklus impliziert:

$$x^n(t) = x^n(t + 2^n) \rightarrow e^{2\pi i k} = 1, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$$

- nach jedem Bifurkationsschritt 2^n neue Subharmonische mit den Amplitudenverhältnissen

$$|a_{2k}^{n+1}| \approx |a_k^n|, \quad |a_{2k+1}^{n+1}| \approx \mu^{-1} |a_{(1/2)(2k+1)}^n|$$

Punkt-Attraktor

periodische
Attraktoren

Lyapunov Exponent

unendliche

Periodenverdopplung

Skalierung und
Selbstähnlichkeit

Feigenbaum-
Konstanten

Chaotische Dynamik

Kritischer Parameter

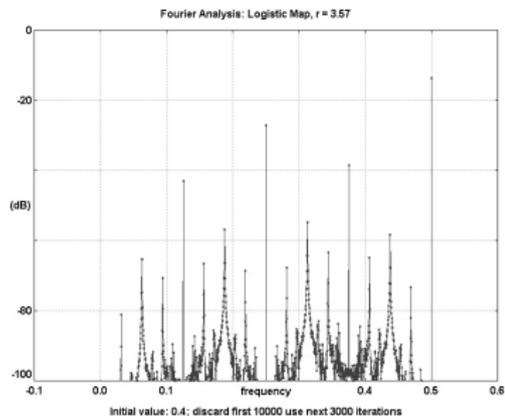
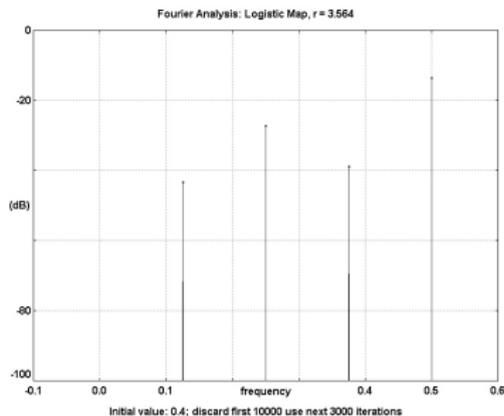
Strukturen im Chaos

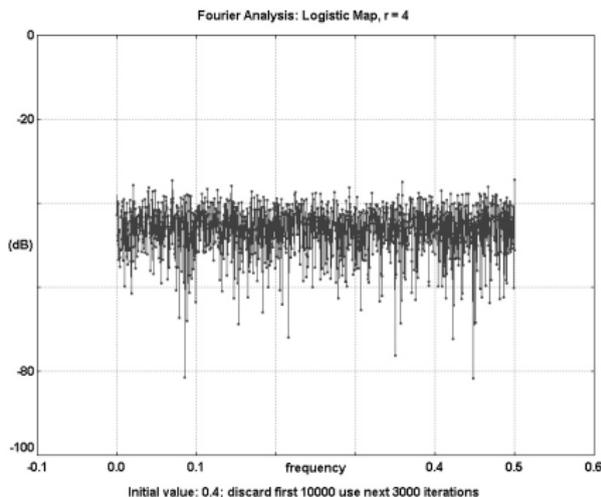
Spektrum

Julia- und

Mandelbrotmengen

Spektrum





- spektral nicht von WN zu unterscheiden
- breakdown of linear analysis
- bei $r = 4$ invariante Dichte (hängt nicht von x_0 ab) \rightarrow ergodisch
- chaotische Bereiche wachsen durch inverse Bifurkation zusammen, bei $r = 4$ iterierte über ganzes Intervall verteilt

Julia- und Mandelbrotmengen

- „komplexify to simplify“: $r = (r_x, r_y)$
Substituiere $x = -\frac{z}{r} + \frac{1}{2}$ und $c = (1 - \frac{r}{2})\frac{r}{2}$:

$$f_c(z_n) = z_{n+1} = z_n^2 + c$$

- für welche Anfangspopulationen z_0 Generationenfolgen bei festem c bzw. r beschränkt?

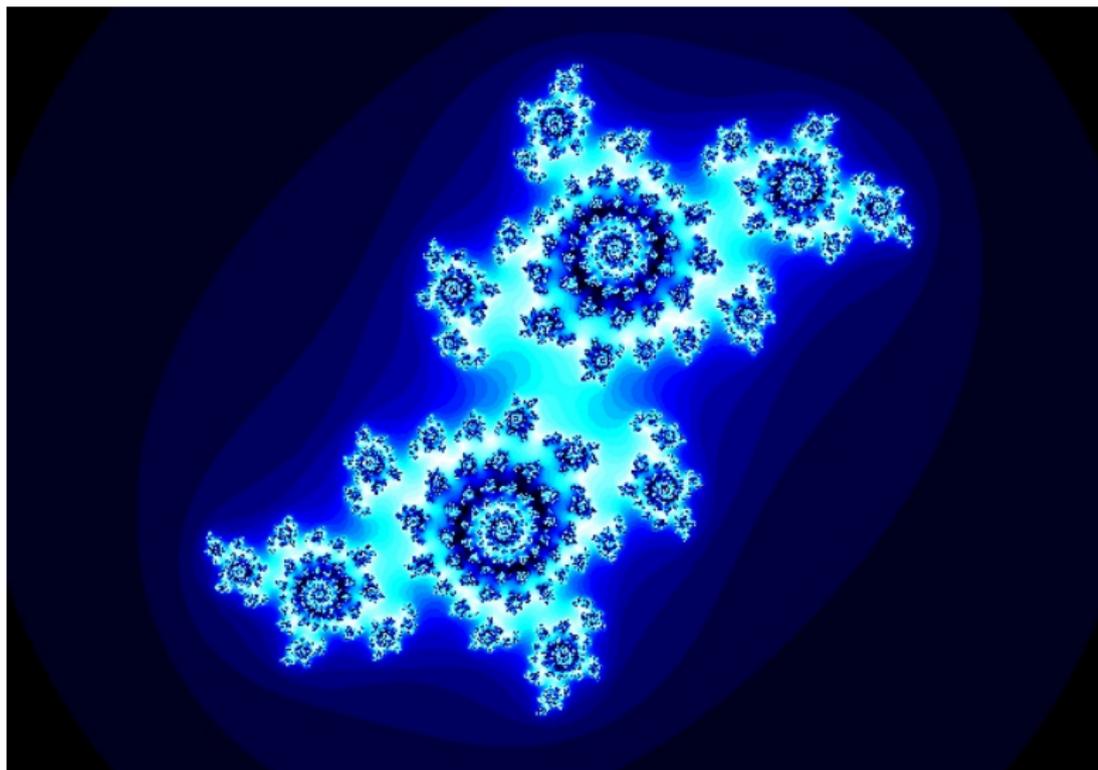
Julia-Menge

$$J_c = \text{Rand von } \{z \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(z) \rightarrow \infty\}$$

- welche Generationenfolgen (z_0, z_1, z_2, \dots) bleiben in Abhängigkeit von c beschränkt?

Mandelbrot-Menge

$$M = \{c \mid J_c \text{ zus.hängend}\} = \{c \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(z) \not\rightarrow \infty\}$$



Punkt-Attraktor

periodische
Attraktoren

Lyapunov Exponent

unendliche
Periodenverdopplung

Skalierung und
Selbstähnlichkeit

Feigenbaum-
Konstanten

Chaotische Dynamik

Kritischer Parameter

Strukturen im Chaos

Spektrum

Julia- und
Mandelbrotmengen

Mandelbrot-Menge

