Theoretische Physik IV: Statistische Physik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer, WS 2017/18)

Aufgabenzettel Nr. 2

Abgabe am Freitag, den 27.10.17 nach der Vorlesung. Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name des Tutors und Ihrem Namen deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Exakte und nicht-exakte Differentiale **(5 Pkt.)**

Für ein beliebiges Differential $\delta\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\mathrm{d}x_i$ mit den Koeffizientenfunktionen $\alpha_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist das Wegintegral über einen Weg Γ definiert als

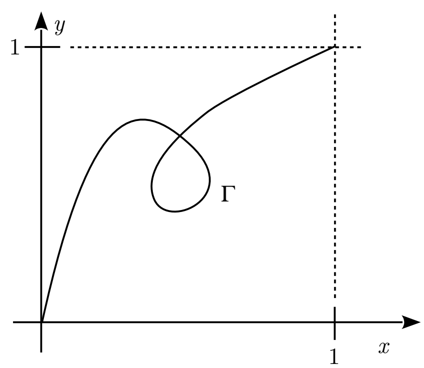
$$\int_\Gamma \delta\omega := \int_0^1 \mathrm{d}t \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\big(\gamma(t)\big)\dot{\gamma}_i(t).$$

Hierbei ist $\gamma : [0,1] \ni t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung des Weges Γ.

i.) Gegeben sei nun das Differential $\delta\omega_1 = e^y\mathrm{d}x + xe^y\mathrm{d}y$. Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\Gamma \delta\omega_1$$

entlang des in der Abbildung skizzierten Weges Γ. **(2 Pkt.)**



ii.) Warum ist dieselbe Aufgabenstellung für das Differential $\delta\omega_2 = e^y\mathrm{d}x + e^y\mathrm{d}y$ nicht sinnvoll? **(1 Pkt.)**

iii.) Machen Sie den Ansatz $\mathrm{d}\omega_2(x,y) = f(x)\delta\omega_2(x,y)$ und bestimmen Sie den integrierenden Faktor f aus der Bedingung

$$f(x)\delta\omega_2(x,y) = \frac{\partial V_2(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V_2(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y$$

mit einer skalaren Funktion $V_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. **(2 Pkt.)**

Augabe 2: Elementare Beziehungen totaler Differentiale **(5 Pkt.)**

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Aus der Zwangsbedingung $f(A,B,C) = 0$ definieren sich implizit Funktionen $A(B,C)$, $B(A,C)$ und $C(A,B)$ um den Punkt (A_0, B_0, C_0).

i.) Geben Sie die totalen Differentiale der Funktionen A, B und C in Abhängigkeit der partiellen Ableitungen von f an. Welche Bedingung muss f erfüllen, damit diese Differentiale existieren? **(3 Pkt.)**

ii.) Zeigen Sie mithilfe von Teil i.) die Beziehung

$$\left.\frac{\partial A}{\partial B}\right|_{B_0,C_0} = \frac{1}{\left.\frac{\partial B}{\partial A}\right|_{A(B_0,C_0),C_0}}. \tag{1}$$

(1 Pkt.)

iii.) Zeigen Sie auf analoge Weise die Identität

$$\left.\frac{\partial A}{\partial B}\right|_{B_0,C_0} \left.\frac{\partial B}{\partial C}\right|_{A(B_0,C_0),C_0} \left.\frac{\partial C}{\partial A}\right|_{A(B_0,C_0),B_0} = -1.$$

(1 Pkt.)

Aufgabe 3: Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung **(7 Pkt.)**

Die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung beschreibt die Verteilung der Geschwindigkeiten von Teilchen der Masse m in einem idealen Gas bei Temperatur T. Ihre Wahrscheinlichkeitsdichte $\phi(\vec{v})$ ist gegeben durch

$$\phi(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\vec{v}^2}{2k_B T}} \tag{2}$$

und die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen in einem bestimmten Volumen $\square$ des Geschwindigkeitsraums vorzufinden lautet $P(\square) = \int_\square \phi(\vec{v}) \mathrm{d}^3 v$.

i.) Zeigen Sie mithilfe der Isotropie des Raumes und der statistischen Unabhängigkeit der Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y und v_z, dass die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeit tatsächlich von der Gestalt einer Gaußfunktion sein muss. Gleichung (2) darf hierbei nicht benutzt werden. **(3 Pkt.)**

ii.) Welche Verteilung ergibt sich aus Gleichung (2) für die Verteilungen der Absolutgeschwindigkeit $\phi(v) := \phi(|\vec{v}|)$ und der kinetischen Energie $\phi(E_{\text{kin}})$? **(2 Pkt.)**

iii.) Verifizieren oder falsifizieren Sie die Beziehung

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v \rangle^2.$$

Hierbei bezeichnet $\langle x \rangle = \int x\phi(x)\mathrm{d}x$ den Erwartungswert der Größe x mit $x = E_{\text{kin}}$ bzw. $x = v$. **(2 Pkt.)**

Münsteraufgabe

Wie hängt die Höhe der Hahnentürme und die Breite des Münsters mit seiner Namensgeberin zusammen?