Übungen zur Theoretischen Physik I

(Vorlesung J. Timmer, WS 2013/14)

Aufgabenblatt 6

Abgabe am Donnerstag, den 28.11.13 nach der Vorlesung

Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name und Name des Tutors deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Spaltenrang und Zeilenrang (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

(i) den Spaltenrang von A,

(ii) den Zeilenrang von A,

(iii) die Dimension des Bildes von A.

Aufgabe 2: Kovariantes und kontravariantes Transformationsverhalten – Beispiel (6 Punkte)

Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, die in der kanonischen Basis $\mathcal{E}$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Form

$$A = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) & r\sin(\phi) \\ -r\sin(\phi) & r\cos(\phi) \end{pmatrix}$$

mit $r \neq 0$, annimmt. Durch die umkehrbare Abbildung A wird mit $\vec{b}_i = \sum_j A_{ij}\vec{e}_j$ eine Basistransformation in eine neue Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ definiert.

(a) Berechnen Sie die neuen Basisvektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$. Zeigen Sie, dass die neue Basis auch durch $\vec{b}_i = A^T\vec{e}_i$ erhalten werden kann. Die transponierte Matrix A^T der Matrix A ist über $A^T_{ij} = A_{ji}$ definiert.

(b) Sei nun $\vec{x}$ ein Vektor, der in der Basis $\mathcal{E}$ die Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$$

annimmt. Wie lautet die Darstellung von $\vec{x}$ in der Basis $\mathcal{B}$?

(c) Finden Sie eine lineare Abbildung, die den Zusammenhang der Koordinaten von $\vec{x}$ in den jeweiligen Basissystemen beschreibt. Gesucht ist also eine Matrix P mit

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

wobei $\vec{x} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen A und P?

Aufgabe 3: Kovariantes und kontravariantes Transformationsverhalten – Allgemein (6 Punkte)

Sei V ein Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ und sei V^* der Dualraum mit der zu $\mathcal{B}$ dualen Basis $\mathcal{B}^* = \{\omega^1, \dots, \omega^n\}$, d.h.

$$\omega^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j.$$

Sei nun $\mathcal{B}' = \{\vec{b}_i \,|\, \vec{b}_i = \sum_j M_{ij}\vec{e}_j\}$ eine neue, durch die invertierbare Matrix M induzierte, Basis von V. M heißt Basistransformation.

(a) Drücken Sie einen Vektor $\vec{x}$ sowohl in der Basis $\mathcal{B}$ als auch in der Basis $\mathcal{B}'$ aus. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Koordinaten des Vektors in den jeweiligen Basissystemen?

(b) Geben Sie die durch M induzierte duale Basis $(\mathcal{B}')^* = \{\varrho^k \,|\, \varrho^k(\vec{b}_j) = \delta^k_j\}$ in Abhängigkeit der ursprünglichen Basis $\mathcal{B}^*$ an. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Teil (a).