Übungen zur Theoretischen Physik I

(Vorlesung J. Timmer, WS 2013/14)

Aufgabenblatt 7

Abgabe am Donnerstag, den 05.12.13 nach der Vorlesung

Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name und Name des Tutors deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Lösbarkeit linearer Gleichungssyteme (4 Punkte)

Sei $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ ein inhomogenes lineares Gleichungssystem. Zeigen Sie, dass es mindestens eine Lösung $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ des linearen Gleichungssystems gibt, wenn

$$\mathrm{Rang}(A, \vec{b}) = \mathrm{Rang} A$$

gilt. Hierbei bezeichnet $(A, \vec{b})$ die Matrix in $\mathbb{R}^{m\times(n+1)}$, die sich durch spaltenweises Aneinanderhängen der Matrix A und des Spaltenvektors $\vec{b}$ ergibt.

Aufgabe 2: Determinante und Eigenwerte (2 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

gilt. *Hinweis: Benutzen Sie, dass* $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ *ist.*

Aufgabe 3: Eigenwerte und Inverses reeller 2×2-Matrizen (6 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

eine 2×2-Matrix mit reellen Koeffizienten.

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(ii) Berechnen Sie die zu A inverse Matrix A^{-1}.

(iii) Zeigen Sie allgemein, dass eine diagonalisierbare 2×2-Matrix mit reellen Koeffizienten entweder reele Eigenwerte oder zwei komplex konjungierte Eigenwerte von der Gestalt

$$\lambda_1 = a + ib, \quad \lambda_2 = a - ib$$

besitzt.

(iv) Zeigen Sie, dass für jede invertierbare 2×2-Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

gilt.

Bemerkung: Dies gilt auch für 2×2-Matrizen mit komplexen Koeffizienten.

Aufgabe 4: Volumen und Determinante (3 Punkte)

Seien $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \in \mathbb{R}^3$ drei Vektoren und $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Spatprodukts die Volumenänderung durch A, indem Sie das von den drei Bildvektoren $A\vec{x}_1$, $A\vec{x}_2$ und $A\vec{x}_3$ aufgespannte Volumen berechnen und das Verhältnis zum ursprünglichen, durch $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ aufgespannten, Volumen bilden. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Determinante der Matrix A.