Übungen zur Theoretischen Physik I

(Vorlesung J. Timmer, WS 2013/14)

Aufgabenblatt 8

Abgabe am Donnerstag, den 12.12.13 nach der Vorlesung

Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name und Name des Tutors deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Hermitesches Skalarprodukt (4 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Eine Funktion $g : V \times V \to \mathbb{C}$ defniert ein komplexes Skalarprodukt, wenn für alle $x, y, z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ folgende Eigenschaften gelten:

(i) $g(x + y, z) = g(x, z) + g(y, z)$

(ii) $g(\lambda x, y) = \lambda g(x, y)$

(iii) $g(x, y) = g(y, x)^*$ (hermitesch)

(iv) $g(x, x) > 0$, falls $x \neq 0$

(a) Zeigen Sie dass $g(x, x) \in \mathbb{R}$ und $g(x, \lambda y) = \lambda^* g(x, y)$.

(b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine lineare Abbildung auf dem n-dimensionalen Vektorraum V. Die Matrix A heißt hermitesch, wenn Sie mit ihrer transponierten und komplex konjungierten Matrix übereinstimmt, also $A = {A^*}^T$. Zeigen Sie, dass für eine hermitesche Matrix A

$$g(x, Ay) = g(Ax, y)$$

gilt, wenn A^* mit der Skalarprodukt-erzeugenden Matrix G kommutiert. $G = \{g_{ij}\}$ ist hierbei analog zu Aufgabe 2, Blatt 3 über $g(x, y) = \sum_{ij} g_{ij} x_i y_j^*$ definiert. Was folgt damit für das Standardskalarprodukt ($g_{ij} = \delta_{ij}$)?

Aufgabe 2: Eigenwerte symmetrischer Matrizen (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie:

(a) Eigenwerte von A sind reell.

Hinweis: Nutzen Sie das Ergebnis der Aufgabe 1 (b).

(b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Aufgabe 3: Diagonalisieren von Matrizen (4 Punkte)

Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das heißt, finden Sie eine Matrix P, so dass $B = P^T AP$ diagonal ist. Wie lautet B?

Aufgabe 4: Galilei-Transformation (4 Punkte)

Eine allgemeine Galilei-Transformation ist eine Koordinatentransformation der Form

$$g : \begin{cases} \vec{r}\,' = D(\vec{r} - \vec{r}_0 - \vec{v}t) \\ t' = t - t_0 \end{cases}$$

wobei $\vec{r}_0, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und D eine orthogonale 3x3-Matrix ist. Betrachten Sie eine Galilei-Transformation g_1 mit

$$D = D(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

(a) Was beschreibt $D(\theta)$ geometrisch?

(b) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

für ein Teilchen, auf das eine zeit- und ortsabhängige Kraft $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$ wirkt, invariant unter der Galilei-Transformation g_1 ist.

Hinweis: Invarianz bedeutet hier, dass die Bewegungsgleichung auch im transformierten Koordinatensystem gilt, zu zeigen ist also, dass $\vec{F}\,' = m\ddot{\vec{r}}\,'$.