Übungen zur Theoretischen Physik I

(Vorlesung J. Timmer, WS 2013/14)

Aufgabenblatt 10

Abgabe am Donnerstag, den 9.1.14 nach der Vorlesung

Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name und Name des Tutors deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Zentralpotential (4 Punkte)

Gegeben sei ein Potential $U(\vec{r}) = f(r)$, welches nur vom Abstand $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ zum Koordinatenursprung abhängt. Hierbei ist $f(r)$ eine beliebige zweifach differenzierbare Funktion des Abstandes.

(a) Berechnen Sie das Gradientenfeld $\vec{\nabla} U(\vec{r})$ und dessen Divergenz $\Delta U(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} U(\vec{r}))$. Drücken Sie Ihre Ergebnisse in Abhängigkeit des Vektors $\vec{r}$, der Funktion $f(r)$ sowie deren Ableitungen $f'(r)$ und $f''(r)$ aus.

(b) Betrachten Sie nun den Fall $f(r) = r^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Für welche n verschwindet $\Delta U(\vec{r})$ für alle $r > 0$?

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie des Potentials, das bei Vertauschung von x, y und z unverändert bleibt. Wenn also $\partial_x U$ bekannt ist, kann $\partial_y U$ durch Vertauschen von x und y erhalten werden.

Aufgabe 2: Gradient und Äquipotentiallinien (4 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen $U_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $U_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$U_1(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$
$$U_2(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

und $a > b > 0$.

(i) Berechnen Sie die Gradienten $\vec{F}_1 = \vec{\nabla} U_1$ und $\vec{F}_1 = \vec{\nabla} U_1$.

(ii) Sei nun $a = 1{,}2$ und $b = 0{,}8$. Zeichen Sie die Äquipotentiallinien zu $U_1 = 0$ und $U_1 = 1$, sowie zu $U_2 = -1$, $U_2 = 0$ und $U_2 = 1$.
Hinweis: Die Äquipotentiallinie der Funktion U zum Wert z ist als die Menge $\Phi_z = \{(x, y) |\, U(x, y) = z\}$ definiert.

(iii) Skizzieren Sie in derselben Zeichnung die Gradientenfelder $\vec{F}_1$ bzw. $\vec{F}_2$.

Weihnachtsaufgabe 3: Identitäten (4 Bonuspunkte)

Zeigen Sie:

(a) Für jedes skalare Feld $U(\vec{r})$ verschwindet die Rotation des Gradienten: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} U) = 0$.

(b) Für jedes Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ verschwindet die Divergenz der Rotation: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$.

Weihnachtsaufgabe 4: Wirbelfelder (6 Bonuspunkte)

Gegeben seien die drei Vektorfelder

$$\vec{F}_1(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_2(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{F}_3(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} \ \text{ mit } \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ wobei } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie jeweils die Divergenz und Rotation der drei Felder.

(b) Skizzieren Sie die drei Felder in der x-y-Ebene.

(c) Stellen Sie sich $\vec{F}_{1,2,3}$ als Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit vor. Überlegen Sie sich anhand der oben angefertigten Skizzen (ohne Rechnung!), was geschieht, wenn Sie in diese Strömungsfelder einen kleinen drehbaren Korken mit fesgehaltener Drehachse in z-Richtung setzen. Wird sich der Korken drehen? Hängt die Drehgeschwingkeit vom Ort des Korkens auf der x-y-Ebene ab?