Übungen zur Theoretischen Physik I

(Vorlesung J. Timmer, WS 2013/14)

Aufgabenblatt 14

Abgabe am Donnerstag, den 6.2.14 nach der Vorlesung

Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name und Name des Tutors deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Der gedämpfte harmonische Oszillator (6 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators,

$$\ddot{x}(t) + 2\rho\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0\,,$$

drei allgemeine Lösungen besitzt:

$$\begin{aligned} \text{starke Dämpfung:} \quad x(t) &= \mathrm{e}^{-\rho t}(a\,\mathrm{e}^{\tilde{\omega}t} + b\,\mathrm{e}^{-\tilde{\omega}t}) \\ \text{schwache Dämpfung:} \quad x(t) &= \mathrm{e}^{-\rho t}(a'\cos\tilde{\omega}t + b\,\sin\tilde{\omega}t) \\ \text{aperiodischer Grenzfall:} \quad x(t) &= \mathrm{e}^{-\rho t}\,(\alpha + \beta t) \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{\omega} = \sqrt{|\omega_0^2 - \rho^2|}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Lösungen, ausgedrückt durch die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$, folgendermaßen lauten:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\rho t}\left[x_0\left(\cosh\tilde{\omega}t + \frac{\rho}{\tilde{\omega}}\sinh\tilde{\omega}t\right) + \frac{v_0}{\tilde{\omega}}\sinh\tilde{\omega}t\right] \tag{1}$$

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\rho t}\left[x_0\left(\cos\tilde{\omega}t + \frac{\rho}{\tilde{\omega}}\sin\tilde{\omega}t\right) + \frac{v_0}{\tilde{\omega}}\sin\tilde{\omega}t\right] \tag{2}$$

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\rho t}\,(x_0\,(1 + \rho t) + v_0 t) \tag{3}$$

Hierbei wurden die *hyperbolischen Funktionen*

$$\cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \qquad \text{und} \qquad \sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$$

eingeführt.

(b) Betrachten Sie die folgenden Grenzwerte für die Lösungen:

(i) $\tilde{\omega} \to 0$ (aperiodischer Grenzfall): Sowohl aus Gl. (1) als auch aus Gl. (2) sollten Sie in diesem Grenzfall die Lösung (3) erhalten.

(ii) $\omega_0 \to 0$: In diesem Fall sollten Sie aus Lösung (1) die Lösungen zur freien Bewegung mit Reibung ($\ddot{x} = -2\rho\dot{x}$) erhalten.

(iii) $\rho \to 0$: In diesem Fall sollte die Lösung (2) in die Lösung des harmonischen (ungedämpften) Oszillators übergehen. Was passiert in diesem Fall mit Lösung (3)?

Nutzen Sie für die Funktionen folgendes Verhalten für $x \to 0$:

$$\sin x = x + \mathcal{O}(x^3) \quad , \quad \cos x = 1 + \mathcal{O}(x^2)$$

$$\sinh x = x + \mathcal{O}(x^3) \quad , \quad \cosh x = 1 + \mathcal{O}(x^2) \quad , \quad \mathrm{e}^x = 1 + \mathcal{O}(x)\,.$$

Bei den folgenden *Münsteraufgaben* handelt es sich um eine bis ins Jahr 1513 zurückreichende Tradition. Bearbeiten Sie die Aufgaben daher mit großer Sorgfalt. Die Besprechung der Lösungen findet am Donnerstag, den 13.2.2014, in der Vorlesung statt.

Aufgabe 2: Münsteraufgabe

Bischofskirchen haben zwei Türme. Freiburg ist Bischofssitz. Warum hat das Münster nur einen Turm?

Aufgabe 3: Münsteraufgabe

Auf der historischen Abbildung des Münsters im Schaufenster der Hof-Apotheke, Ecke KaJo/Münsterstraße, sieht man, dass vier Stufen zum Hauptportal des Münsters hinaufführten. Warum is es heute nur noch eine?

Aufgabe 4: Münsteraufgabe

Wie steht das Münster mit dem "Gastmahl" von Platon in Zusammenhang? Studieren Sie dazu die Schriften Proklos', Plotins und des Abtes Suger von St. Denis.