Theoretische Physik IV: Quantenmechanik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer)

Aufgabenzettel Nr. 10

Aufgabe 1: Energiespektrum des Wasserstoffatoms **(9 Pkt.)**

In der klassischen Mechanik ist das Keplerproblem von zentraler Bedeutung. Neben der Energie und dem Drehimpuls als Erhaltungsgrößen gibt es noch eine weitere, davon unabhängige, Erhaltungsgröße: Den *Lenz-Runge-Vektor*

$$\vec{F} = \frac{1}{m_0}\vec{p} \times \vec{L} - \frac{k}{r}\vec{r}. \tag{1}$$

Über das Korrespondenzprinzip lässt sich diese Größe in einen quantenmechanischen Operator überführen. Da die Operatoren $\hat{\vec{p}}$ und $\hat{\vec{L}}$ nicht vertauschen, muss Gl. (1) erst symmetrisiert werden, d.h. $\vec{p} \times \vec{L} \rightsquigarrow \frac{1}{2}\left(\vec{p} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{p}\right)$, um einen selbstadjungierten Operator zu liefern, den *Lenz-Runge-Operator*

$$\begin{aligned} \hat{\vec{F}} &:= \frac{\hbar}{2m_0}\left(\hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{L}} - \hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{p}}\right) - \frac{k}{r}\hat{\vec{x}} \\ \iff \quad \hat{F}_i &= \frac{1}{2m_0}\left(\hat{\vec{p}}^{\,2}\hat{x}_i + \hat{x}_i\hat{\vec{p}}^{\,2} - (\hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{x}})\hat{p}_i - \hat{p}_i(\hat{\vec{x}} \cdot \hat{\vec{p}})\right) - \frac{k}{r}\hat{x}_i. \end{aligned} \tag{2}$$

i.) Ein Operator $\hat{\vec{A}} = (\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3)$ heißt *Vektoroperator*, wenn er die Vertauschungsrelation $[L_i, A_j] = i\hbar\sum_k \epsilon_{ijk}A_k$ mit dem Drehimpulsoperator hat. Hierbei bezeichnet ϵ_{ijk} das Levi-Civita-Symbol. Beispiele für Vektoroperatoren sind $\hat{\vec{x}}$ und $\hat{\vec{p}}$.

(a) Zeigen Sie, dass auch $\hat{\vec{F}}$ ein Vektoroperator ist. **(2 Pkt.)**
Hinweis: Gehen Sie von Gl. (2) aus und zeigen Sie, dass $\forall i: \ [\hat{L}_i, \hat{\vec{A}} \cdot \hat{\vec{B}}] = 0$ für beliebige Vektoroperatoren $\hat{\vec{A}}, \hat{\vec{B}}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{\vec{L}}$ und $\hat{\vec{F}}$ "senkrecht" aufeinander stehen, d.h. $\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{F}} = 0$. **(2 Pkt.)**

ii.) Mit einigem Aufwand lässt sich zeigen, dass $\hat{\vec{F}}$ genau wie $\hat{\vec{L}}$ mit dem Hamiltonoperator des Zentralpotentials, $\hat{H} = \frac{1}{2m_0}\hat{\vec{p}}^{\,2} - \frac{k}{r}$, vertauscht. Die Komponenten $\hat{F}_i$ untereinander haben die Vertauschungsrelation

$$[\hat{F}_i, \hat{F}_j] = -i\frac{2\hbar}{m_0}\hat{H}\sum_k \epsilon_{ijk}\hat{L}_k. \tag{3}$$

Wir gehen nun in den Eigenraum $\mathcal{H}_\alpha \subset \mathcal{H}$ zum Energieeigenwert E_α des Hamiltonoperators und definieren auf diesem Raum die Linearkombinationen

$$\hat{\vec{A}}^{(\alpha)} := \frac{1}{2}\left(\hat{\vec{L}} + \sqrt{\frac{m_0}{-2E_\alpha}}\hat{\vec{F}}\right) \tag{4}$$

$$\hat{\vec{B}}^{(\alpha)} := \frac{1}{2}\left(\hat{\vec{L}} - \sqrt{\frac{m_0}{-2E_\alpha}}\hat{\vec{F}}\right) \tag{5}$$

Zeigen Sie, dass die Operatoren $\hat{\vec{A}}^{(\alpha)}, \hat{\vec{B}}^{(\alpha)}$ die Vertauschungsrelationen

$$[\hat{A}_i^{(\alpha)}, \hat{A}_j^{(\alpha)}] = i\hbar\sum_k \epsilon_{ijk}\hat{\vec{A}}_k^{(\alpha)}, \qquad [\hat{B}_i^{(\alpha)}, \hat{B}_j^{(\alpha)}] = i\hbar\sum_k \epsilon_{ijk}\hat{\vec{B}}_k^{(\alpha)}, \qquad [\hat{A}_i^{(\alpha)}, \hat{B}_j^{(\alpha)}] = 0$$

erfüllen. **(3 Pkt.)**
Bemerkung: Auf dem Eigenraum $\mathcal{H}_\alpha$ ist die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)$ zweier unabhängiger Drehimpulsalgebren realisiert, die diesen Eigenraum invariant lässt.

iii.) Im letzten Teil werden wir das Energiespektrum des Wasserstoffatoms aus unseren rein algebraischen Überlegungen herleiten. Nutzen Sie die (nicht offensichtliche) Relation

$$\hat{\vec{F}}^2 = \frac{2}{m_0}\hat{H}(\hat{\vec{L}}^2 + \hbar^2) + k^2, \tag{6}$$

um die Gleichung

$$4\hat{\vec{A}}^2 = 4\hat{\vec{B}}^2 = -\hbar^2 - \frac{m_0 k^2}{2E_\alpha} \tag{7}$$

auf $\mathcal{H}_\alpha$ zu zeigen. Verwenden Sie diese Gleichung sowie die allgemeine Gestalt möglicher Eigenwerte von $\hat{\vec{A}}^2$ bzw. $\hat{\vec{B}}^2$ um die möglichen Energiewerte E_α herzuleiten. Wie hoch ist der Entartungsgrad eines Energiewerts E_α? **(2 Pkt.)**

Aufgabe 2: Larmor-Präzession **(6 Pkt.)**

Betrachten Sie ein Elektron im magnetischen $\vec{B}$-Feld. Wie mit dem Bahndrehimpuls so ist auch mit dem Spin ein magnetisches Moment verknüpft. Im Falle des Elektrons lautet dieses $\vec{m} = g_e \mu_B \frac{\vec{s}}{\hbar}$ mit dem Landé-Faktor $g_e \approx -2$, dem Bohrschen Magneton μ_B und dem Elektronspin $\vec{s}$. Die Wechselwirkung des ruhenden Elektrons mit dem Magnetfeld wird durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \mu\, \vec{\sigma} \cdot \vec{B}$$

beschrieben, wobei $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{2\vec{s}}{\hbar}$ und

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Pauli-Matrizen sind. Der zugehörige Hilbertraum ist der Raum $\mathbb{C}^2$.

i.) Bestimmen Sie den sogenannten Blochvektor $|\psi_{\vec{\pi}}\rangle \in \mathbb{C}^2$, d.h. einen Zustandsvektor derart, dass

$$\langle \psi_{\vec{\pi}} | \vec{\sigma} | \psi_{\vec{\pi}} \rangle = \vec{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}$$

mit $|\vec{\pi}| = 1$ gilt. **(2 Pkt.)**

ii.) Die Zeitentwicklung des Zustands im Schrödinger-Bild ist über den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ gegeben. Wählen Sie $\vec{B}$ entlang der 3-Achse und zeigen Sie damit, dass

$$U(t) = \mathbb{1} \cos\frac{\omega t}{2} - i\sigma_3 \sin\frac{\omega t}{2}$$

mit der Larmor-Frequenz $\omega := \frac{2\mu}{\hbar}|\vec{B}|$ ist. **(2 Pkt.)**

iii.) Berechnen Sie den zeitabhängigen Zustand $|\psi_{\vec{\pi}}(t)\rangle$ und den zeitabhängigen Polarisationsvektor

$$\vec{\pi}(t) = \langle \psi_{\vec{\pi}}(t) | \vec{\sigma} | \psi_{\vec{\pi}}(t) \rangle.$$

Veranschaulichen Sie das Ergebnis. **(2 Pkt.)**

Münsteraufgabe

Auf der historischen Abbildung des Münsters auf einem Schaltkasten vor der Hof-Apotheke, Ecke Ka-Jo/Münsterstraße, sieht man, dass vier Stufen zum Hauptportal des Münsters hinaufführten. Warum ist es heute nur noch eine?