Theoretische Physik IV: Quantenmechanik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer)

Aufgabenzettel Nr. 5

Aufgabe 1: Unschärferelation **(7 Pkt.)**

Die Unschärferelation für die Orts- und Impulsoperatoren lautet $\Delta x_i \Delta p_j \geq \frac{\hbar}{2}\delta_{ij}$. Diese ist für alle Zustände ψ gültig. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die untere Schranke angenommen wird, falls der Zustand ψ die Differentialgleichung

$$\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} - \langle p\rangle\right)\psi = i\lambda(x - \langle x\rangle)\psi \tag{1}$$

mit vorgegebenem Impulserwartungswert $\langle p\rangle$ und Ortserwartungswert $\langle x\rangle$ erfüllt.

i.) Lösen Sie Gleichung (1) und zeigen Sie mithilfe des Ehrenfest-Theorems, dass der Zustand ψ einem Gauß'schen Wellenpaket mit Ortserwartungswert $\langle x\rangle$ und Ausbreitungsgeschwindigkeit $\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{\langle p\rangle}{m}$ entspricht. **(2 Pkt.)**
Hinweis: Die homogene lineare Differentialgleichung $\psi'(x) = A(x)\psi(x)$ mit $\psi(x), A(x) \in \mathbb{C}$ besitzt die allgemeine Lösung $\psi(x) = e^{\int A(x)\mathrm{d}x}$.

Neben der allgemeinen Herleitung über die Kommutatorrelation lässt sich die Orts-Impuls-Unschärfe auch aus der Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni \psi(x) \mapsto \tilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \psi(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ableiten.

ii.) Zeigen Sie zunächst für $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ die Identität **(2 Pkt.)**

$$-\langle\psi|\psi\rangle = \int x\frac{\partial}{\partial x}|\psi(x)|^2\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{Re}\langle x\psi|\frac{\partial}{\partial x}\psi\rangle.$$

iii.) Nutzen Sie die in Aufgabe 3, Blatt 4 gezeigten Relationen $\mathcal{F}[x\psi] = i\frac{\partial}{\partial k}\mathcal{F}[\psi]$ bzw. $\mathcal{F}[\frac{\partial}{\partial x}\psi] = ik\mathcal{F}[\psi]$, sowie die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung, um

$$\|x\psi(x)\|_2 \cdot \|k\tilde{\psi}(k)\|_2 \geq \frac{1}{2}\|\psi\|_2^2$$

zu folgern. **(1 Pkt.)**

iv.) Im letzten Schritt nehmen Sie an, dass $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ eine beliebige Funktion mit $\|\psi\|_2 = 1$ ist, d.h. $|\psi(x)|^2$ und, wegen der Isometrie, auch $|\tilde{\psi}(k)|^2$ können als Wahrscheinlichkeitsdichten auf $\mathbb{R}$ interpretiert werden. Zeigen Sie nun, dass für deren Varianzen die Ungleichung

$$\left(\int \big(x - \langle x\rangle\big)^2|\psi(x)|^2\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int \big(k - \langle k\rangle\big)^2|\tilde{\psi}(k)|^2\mathrm{d}k\right) \geq \frac{1}{4}$$

gilt. **(2 Pkt.)**
Hinweis: Wie verhält sich die Fouriertransformation unter Translationen?

Münsteraufgabe

Warum ist der Münsterturm unten vier- und oben achteckig?