Theoretische Physik IV: Quantenmechanik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer)

Aufgabenzettel Nr. 6

Aufgabe 1: Teilchen im endlichen Potentialtopf **(8 Pkt.)**

Auf ein Teilchen im eindimensionalen Raum $\mathbb{R}$, also $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, wirke ein Potential

$$v(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } |x| \leq a, \\ V_0, & \text{falls } |x| > a, \end{cases}$$

mit der Breite $2a$ des Potentialtopfes und dessen Höhe $V_0 > 0$. Der Hamilton-Operator des Systems lautet

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + v(x). \tag{1}$$

i.) Zeigen Sie, dass $\hat{H}$ keine negativen Eigenwerte haben kann. **(1 Pkt.)**

ii.) Auf Blatt 4 wurde gezeigt, dass der Paritätsoperator mit dem Hamilton-Operator $\hat{H}$ aus Gleichung (1) vertauscht. Wir bestimmen nun die simultanen Eigenvektoren (bis auf Normierung) und deren Eigenwerte. Hierfür wird der Ansatz

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & \text{falls } |x| \leq a, \\ \psi_2(x), & \text{falls } x > a, \end{cases}$$

gemacht. Die Anschlussbedingungen lauten $\psi_1(a) \stackrel{!}{=} \psi_2(a)$ und $\psi_1'(a) \stackrel{!}{=} \psi_2'(a)$ und, aufgrund der Parität, können wir für $x < -a$: $\psi(x) := \eta\psi(-x)$ mithilfe der Paritätseigenwerte $\eta = \pm 1$ definieren.

(a) Zeigen Sie, dass ψ_1 und ψ_2 den Gleichungen

$$\psi_1''(x) = -k^2\psi_1(x), \quad \psi_2''(x) = \kappa^2\psi_2(x) \tag{2}$$

mit $\hbar k = \sqrt{2mE}$ und $\hbar\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)} = \sqrt{2mV_0 - \hbar^2 k^2}$ genügen. **(1 Pkt.)**

(b) Zeigen Sie mithilfe der Anschlussbedingung, dass das System (2) nur dann Lösungen in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ hat, wenn

$$\tan(ka) = \frac{\kappa}{k} \quad (\eta = 1), \quad \text{bzw.} \quad -\frac{1}{\tan(ka)} = \frac{\kappa}{k} \quad (\eta = -1) \tag{3}$$

gelten. Wie lauten die Lösungen $\psi(x)$ für eine gegebene Lösung k von Gleichung (3)? **(3 Pkt.)**

(c) Plotten Sie $f_A(k) = \tan(ka)$, $f_B(k) = -\frac{1}{\tan(ka)}$ und $f_C(k) = \frac{\kappa(k)}{k}$, siehe Teil (a), in einem gemeinsamen Schaubild und finden Sie die von den Gleichungen (3) zugelassenen Werte für k somit grafisch. Interpretieren Sie das (grafisch) gewonnene Energiespektrum physikalisch. **(2 Pkt.)**

iii.) Warum hat $\hat{H}$ keine Eigenvektoren in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ mit Energiewerten $E > V_0$? Was passiert für $E > V_0$? **(1 Pkt.)**

Aufgabe 2: Streuung am δ-Potential **(7 Pkt.)**

Gegeben sei das (abstoßende) Potential

$$v_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } |x| > \frac{a}{n}, \\ \frac{V_0 n}{2a}, & \text{falls } |x| \leq \frac{a}{n}. \end{cases}$$

Im Folgenden sollen Lösungen der stationären Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x) + v_n(x)\psi(x) = E\psi(x). \tag{4}$$

für Energiewerte $E > 0$ im Limes $n \to \infty$ untersucht werden.

i.) Zeigen Sie, dass für alle stetigen Funktionen $\psi \in C_0(\mathbb{R})$ die Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty} \int v_n(x)\psi(x)\mathrm{d}x = V_0\psi(0)$ gilt. **(1 Pkt.)**

Für die Lösung der Gleichung (4) im Limes $n \to \infty$ wird der Ansatz

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) = A_r e^{ikx} + A_l e^{-ikx}, & \text{falls } x < 0, \\ \psi_2(x) = B_r e^{ikx} + B_l e^{-ikx}, & \text{falls } x \geq 0, \end{cases}$$

gemacht. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, muss die Wellenfunktion stetig sein, d.h. es gibt die Anschlussbedingung $\psi_1(0) = \psi_2(0)$.

ii.) Zeigen Sie, dass für die Ableitungen bei $x = 0$ die Sprungbedingung $\psi_2'(0) - \psi_1'(0) = \frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(0)$ gilt. **(2 Pkt.)**

iii.) Lösen Sie das System der Randbedingungen für den Fall einer einlaufenden ebenen Welle von rechts, d.h. $A_r = 1$ und $B_l = 0$. Berechnen Sie die Reflexionswahrscheinlichkeit $R = |A_l|^2$ und Transmissionswahrscheinlichkeit $T = |B_r|^2$ in Abhängigkeit der Energie E und der Potentialstärke V_0. Skizzieren Sie R und T als Funktionen der Energie $E > 0$ bei konstanter Potentialstärke V_0. Wie sehen die Verläufe für ein klassisches Teilchen aus? **(4 Pkt.)**

Münsteraufgabe

Der Chor des Münsters ist ganz leicht gegen das Hauptschiff geneigt. Warum?