Von der mathematischen Biologie zur Systembiologie

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer)

Aufgabenzettel Nr. 2

Lösen von Differentialgleichungen mit `deSolve`

Installieren und laden Sie sich zunächst das Paket `deSolve`, indem Sie in der R-Kommandozeile

```
install.packages('deSolve'); load(deSolve)
```

eingeben. Schauen Sie sich Beispiel 1 in der Dokumentation von `ode()` an, um Aufgabe 1 lösen zu können.

Aufgabe 1: Das Lotka-Volterra System (simulativ)

Das Lotka-Volterra-System ist durch die folgenden Differentialgleichungen gegeben:

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t) - b \cdot x(t) \cdot y(t), \tag{1}$$

$$\dot{y}(t) = c \cdot x(t) \cdot y(t) - d \cdot y(t). \tag{2}$$

Dabei ist $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ und analog $\mathbb{R} \ni t \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$, und die Parameter $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}_+^4$ sind alle positiv.

i.) Integrieren Sie das System für den Parametersatz $a = 1$; $b = c = 0.1$ und $d = \frac{1}{3}$ und für unterschiedliche Startwerte $x(t = 0)$ und $y(t = 0)$. Erzeugen Sie aus den durch `ode()` für verschiedene Werte von (x_0, y_0) zurückgegebenen Matrizen `data.frame`s: einmal mit Spalten `x, y, ini` und einmal mit Spalten `time, value, species, ini`. Hierbei sei `ini` eine `character-` oder `factor`-Variable zur Kennzeichnung der Anfangsbedingung und `species` sei eine `character`-Variable zur Bezeichnung von x und y.

ii.) Visualisieren Sie die Lösungen mit `ggplot()` im Konfigurationsraum bzw. im Phasenraum. Nutzen Sie die vorhandenen Spalten der `data.frame`s, um die Kurven zu gruppieren und in unterschiedliche Panels aufzuteilen.

iii.) Das *erweiterte Lotka-Volterra-System* hat die Form

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t) \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - b \cdot \frac{x(t)}{x(t) + S} \cdot y(t), \tag{3}$$

$$\dot{y}(t) = c \cdot \frac{x(t)}{x(t) + S} \cdot y(t) - d \cdot y(t), \tag{4}$$

wobei auch die Parameter $K > 0$ und $S > 0$ positiv sind.

Betrachten Sie für den Rest des Aufgabenzettels den speziellen Parametersatz $a = b = c = 1$; $d = \frac{1}{3}$; $K = 30$ und $S = 10$.

Integrieren Sie das erweiterte Lotka-Volterra-System für unterschiedliche Startwerte $x(t = 0)$ und $y(t = 0)$, und betrachten Sie die Lösungen sowohl im Konfigurations- als auch im Phasenraum, analog zu oben.

iv.) Interpretieren Sie das erweiterte Lotka-Volterra-System: Welche Bedeutung haben die darin vorkommenden Parameter? Was sind die qualitativen Unterschiede der beiden Systeme?

Aufgabe 2 (Hausaufgabe): Das Lotka-Volterra-System (analytisch)

i.) Zeigen Sie, dass das erweiterte Lotka-Volterra-System (mit den in Aufgabe 1 i.) angegebenen Parametern) keine stabilen Fixpunkte hat.

ii.) Zeigen Sie, dass alle Lösungen des erweiterten Lotka-Volterra-Systems beschränkt bleiben indem Sie die Regionen bestimmen in denen $(x(t) + y(t))$ wächst, d.h. in denen $\dot{x}(t) + \dot{y}(t) > 0$ ist. Interpretieren Sie das so erhaltene Ergebnis dann richtig!

iii.) Welche Schlussfolgerung kann man aus dem Poincaré-Bendixon-Theorem ziehen?

iv.) Was passiert für den Fall $d = \frac{3}{5}$?